সপ্তম অধ্যায়

অসীম ধারা

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

■ **অনুক্রম :** কতগুলো রাশি একটা বিশেষ নিয়মে ক্রমান্বয়ে এমনভাবে সাজানো হয় যে প্রত্যেক রাশি তার পূর্বের পদ ও পরের পদের সাথে কীভাবে সম্পর্কিত তা জানা যায়। এভাবে সাজানো রাশিগুলোর সেটকে অনুক্রম (Sequence) বলা হয়।

অনুক্রমের পদ নির্ণয় : অনুক্রমের প্রথম রাশিকে প্রথম পদ, দ্বিতীয় রাশিকে দ্বিতীয় পদ, তৃতীয় রাশিকে তৃতীয় পদ ইত্যাদি বলা হয়। উপরে বর্ণিত 1, 4, 9, 16, ... অনুক্রমের প্রথম পদ = 1, দ্বিতীয় পদ = 4, তৃতীয় পদ = 9 এবং চতুর্থ পদ = 16।

■ **ধারা :** কোনো অনুক্রমের পদগুলো পরপর '+' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে একটি ধারা পাওয়া যায়।

■ **সমান্তর ধারা :** কোনো ধারার যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের পার্থক্য সবসময় সমান হলে সেই ধারাকে সমান্তর ধারা বলে।

সমান্তর ধারার ক্ষেত্রে প্রথম পদ = a, সাধারণ অন্তর = d এবং n তম পদ = $a + (n - 1)d$

■ **গুণোত্তর ধারা :** কোনো ধারার যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সবসময় সমান হলে অর্থাৎ যেকোনো পদকে এর পূর্ববর্তী পদ দ্বারা ভাগ করে ভাগফল সর্বদা সমান পাওয়া গেলে, সে ধারাটিকে গুণোত্তর ধারা বলে। গুণোত্তর ধারার ক্ষেত্রে প্রথম পদ = a, সাধারণ অন্তর = r হলে nতম পদ = ar^{n-1}।

■ **অসীম ধারা (Infinite Series) :**

$u_1, u_2, u_3, ... , u_n, ...$ বাস্তব সংখ্যার একটি অনুক্রম হলে $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ কে বাস্তব সংখ্যার একটি অসীম ধারা (Infinite Series) এবং u_n–কে এই ধারার n তম পদ বলা হয়।

প্রত্যেক অনন্ত ধারার আংশিক সমষ্টি নির্ণয় করা যায়। অর্থাৎ সম্পূর্ণ ধারার (অসীম পর্যন) সমষ্টি নির্ণয় করা না গেলেও যেকোনো পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় করা যায়।

■ **অসীম ধারার আংশিক সমষ্টি (Partial sum of Infinite Series) :**

$u_1 + u_2 + u_3 + ...$ অনন্ত ধারার

১ম আংশিক সমষ্টি, $S_1 = u_1$

২য় আংশিক সমষ্টি, $S_2 = u_1 + u_2$

৩য় আংশিক সমষ্টি, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$ ইত্যাদি। এভাবে n তম আংশিক সমষ্টি হচ্ছে ধারাটির প্রথম n সংখ্যক (যেখানে $n \in N$) পদের সমষ্টি।

যেমন : 1 + 2 + 3 + 4 + ... ধারার

১ম আংশিক সমষ্টি, $S_1 = 1$

২য় আংশিক সমষ্টি, $S_2 = 1 + 2 = 3$

৩য় আংশিক সমষ্টি, $S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

....

....

n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

■ **অসীম গুণোত্তর ধারা (Infinite Geometric Series) :**

$a + ar + ar^2 + ...$ একটি গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r, পদগুলোকে $u_1, u_2, u_3, ...$ ইত্যাদি ধরে দেখা যায় যে, $u_1 = a$, $u_2 = ar$, $u_3 = ar^2$, ... ইত্যাদি এবং সাধারণভাবে $u_n = ar^{n-1}$ $(n \in \mathbf{N})$, $r \neq 1$ হলে, এই গুণোত্তর ধারার n তম আংশিক সমষ্টি,

$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3............ + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, যখন $r > 1 = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, যখন $r < 1$

$S_n = |r| < 1$ হলে, r^n এর প্রান্তীয় মান 0 হয়। ফলে, $\frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a(1 - 0)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$

সুতরাং, এক্ষেত্রে $a + ar + ar^2 + ...$ অনন্ত ধারার সমষ্টি $S = \frac{a}{1 - r}$

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

১. 1, 3, 5, 7 অনুক্রমটির 12 তম পদ কোনটি?

ক 12 খ 13 ● 23 ঘ 25

ব্যাখ্যা : ১ম পদ $a = 1$ এবং সাধারণ অন্তর $d = 2$

$\therefore$ n তম পদ $= a + (n - 1) d$

12 তম পদ $= 1 + (12 - 1) 2 = 1 + 22 = 23$

২. কোনো অনুক্রমের n তম পদ = $\frac{1}{n(n+1)}$ এর ৩য় পদ কোনটি?

ক $\frac{1}{3}$ খ $\frac{1}{6}$ ● $\frac{1}{12}$ ঘ $\frac{1}{20}$

ব্যাখ্যা : n তম পদ $= \frac{1}{n(n+1)}$ $\therefore$ ৩য় পদ $= \frac{1}{3(3+1)} = \frac{1}{12}$

৩. কোনো অনুক্রমের n তম পদ = $\frac{1-(-1)^n}{2}$ হলে 20 তম পদ কোনটি?

● 0 খ 1 গ –1 ঘ 2

ব্যাখ্যা : 20 তম পদ $= \frac{1-(-1)^{20}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$

৪. কোনো অনুক্রমের n তম পদ $U_n = \frac{1}{n}$ এবং $U_n < 10^{-4}$ হলে n এর মান হবে–

i. $n < 10^3$

ii. $n < 10^4$

iii. $n > 10^4$

নিচের কোনটি সঠিক?

● iii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

নিম্নের ধারাটি লক্ষ কর এবং ৫ – ৭ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও।

$4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}$,................

৫. ধারাটির 10 তম পদ কোনটি?

ক $\frac{4}{3^{10}}$ ● $\frac{4}{3^9}$ গ $\frac{4}{3^{11}}$ ঘ $\frac{4}{3^{12}}$

৬. ধারাটির ১ম 5 পদের সমষ্টি কত?

ক $\frac{160}{27}$ ● $\frac{484}{81}$ গ $\frac{12}{9}$ ঘ $\frac{20}{9}$

৭. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?

ক 0 খ 5 ● 6 ঘ 7

প্রশ্ন ॥ ৮ ॥ প্রদত্ত অনুক্রমের 10 তম পদ, 15 তম পদ এবং r তম পদ নির্ণয় কর :

ক. 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

খ. $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$, ...

গ. অনুক্রমটির n তম পদ = $\frac{1}{n(n+1)}$, $n \in N$

ঘ. 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...

ঙ. $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \frac{5}{81}$, ...

চ. অনুক্রমটির n তম পদ = $\frac{1-(-1)^{3n}}{2}$

সমাধান: ক. দেওয়া আছে, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

প্রদত্ত অনুক্রমটির (যেকোনো পদ – পূর্ববর্তী পদ)

$= 4 - 2 = 2$

অথবা, $6 - 4 = 2$

অথবা, $8 - 6 = 2$

$\therefore$ প্রদত্ত অনুক্রমটি একটি সমান্তর অনুক্রম।

এখানে, প্রথম পদ, $a = 2$

এবং সাধারণ অন্তর, $d = 2$

$\therefore$ অনুক্রমের 10 তম পদ, $u_{10} = a + (10 - 1)d$

$= 2 + 9 \times 2$

$= 2 + 18$

$= 20$

$\therefore$ অনুক্রমের 15 তম পদ, $u_{15} = a + (15 - 1)d$

$= 2 + 14 \times \frac{1}{2}$

$= 2 + 28$

$= 30$

$\therefore$ অনুক্রমের r তম পদ, $u_r = a + (r - 1)d$

$= 2 + (r - 1) \times 2$

$= 2 + 2r - 2$

$= 2r$

Ans. 20, 30 এবং 2r

খ. দেওয়া আছে,

$\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$, ...

প্রদত্ত অনুক্রমটির (যেকোনো পদ – পূর্ববর্তী পদ) $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত অনুক্রমটি একটি সমান্তর অনুক্রম।

এখানে, প্রথম পদ, $a = \frac{1}{2}$ এবং সাধারণ অন্তর, $d = \frac{1}{2}$

$\therefore$ অনুক্রমের 10 তম পদ, $u_{10} = a + (10 - 1)d$

$= \frac{1}{2} + 9 \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} + \frac{9}{2}$

$= \frac{10}{2}$

$= 5$

$\therefore$ অনুক্রমের 15 তম পদ, $u_{15} = a + (15 - 1)d$

$= \frac{1}{2} + 14 \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} + 7$

$= \frac{1 + 14}{2}$

$= \frac{15}{2}$

$\therefore$ অনুক্রমের r তম পদ, $u_r = a + (r - 1)d$

$= \frac{1}{2} + (r - 1) \times 2$

$= \frac{1}{2} + \frac{r}{2} - \frac{1}{2}$

$= \frac{r}{2}$

Ans. $5, \frac{15}{2}$ এবং $\frac{r}{2}$

গ. দেওয়া আছে, অনুক্রমটির n তম পদ, $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$\therefore$ অনুক্রমটির 10 তম পদ, $u_{10} = \frac{1}{10(10+1)} = \frac{1}{10 \times 11}$

$= \frac{1}{110}$

$\therefore$ অনুক্রমটির 15 তম পদ, $u_{15} = \frac{1}{15(15+1)}$

$= \frac{1}{15 \times 16} = \frac{1}{240}$

$\therefore$ অনুক্রমটির r তম পদ, $u_r = \frac{1}{r(r+1)}$

Ans. $\frac{1}{110}, \frac{1}{240}, \frac{1}{r(r+1)}$

ঘ. দেওয়া আছে, 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...,

প্রদত্ত অনুক্রমটি থেকে দেখা যায় যে, বিজোড় স্থানের পদগুলো 0 এবং জোড় স্থানের পদগুলো 1

$\therefore$ অনুক্রমের 10 তম পদ $u_{10} = 1$ [$\because$ 10 জোড় স্থানীয় পদ]

$\therefore$ অনুক্রমের 15 তম পদ, $u_{15} = 0$ [$\because$ 15 বিজোড় স্থানীয় পদ]

এখন যদি r জোড় হয়, তবে r তম পদ, $u_r = 1$

এবং যদি r বিজোড় হয়, তবে r তম পদ, $u_r = 0$

Ans. 1, 0 এবং 1(π জোড় হলে) ও 0 (r বিজোড় হলে)

ঙ. দেওয়া আছে, $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \frac{5}{81}$, ...

অনুক্রমটির (যেকোনো পদ ÷ পূর্ববর্তী পদ) $= \frac{5}{3} \div 5 = \frac{1}{3}$

অথবা, $\frac{5}{9} \div \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

অথবা, $\frac{5}{27} \div \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত অনুক্রমটি একটি গুণোত্তর অনুক্রম, যার প্রথম পদ, a = 5

এবং সাধারণ অনুপাত, $q = \frac{1}{3}$

$\therefore$ অনুক্রমের 10 তম পদ, $u_{10} = aq^{10-1} = 5.\left(\frac{1}{3}\right)^9$

$= 5.\frac{1}{3^9}$

$= \frac{5}{3^9}$

$\therefore$ অনুক্রমের 15 তম পদ, $u_{15} = aq^{15-1} = 5.\left(\frac{1}{3}\right)^{14}$

$= 5.\frac{1}{3^{14}} = \frac{5}{3^{14}}$

$\therefore$ অনুক্রমের r তম পদ, $u_r = aq^{r-1}$

$= 5.\left(\frac{1}{3}\right)^{r-1}$

$= 5.\frac{1}{3^{r-1}} = \frac{5}{3^{r-1}}$

Ans. $\frac{5}{3^9}, \frac{5}{3^{14}}$ এবং $\frac{5}{3^{r-1}}$

চ. দেওয়া আছে,

অনুক্রমটির n তম পদ, $u_n = \frac{1-(-1)^{3n}}{2}$

$\therefore$ অনুক্রমের 10 তম পদ, $u_{10} = \frac{1-(-1)^{3\times10}}{2}$

$= \frac{1-1}{2} = 0$

$\therefore$ অনুক্রমের 15 তম পদ, $u_{15} = \frac{1-(-1)^{3\times15}}{2}$

$= \frac{1-(-1)}{2} = \frac{2}{2}$

$= 1$

$\therefore$ অনুক্রমের r তম পদ, $u_r = \frac{1-(-1)^{3r}}{2}$

এখানে, r জোড় হলে, $u_r = \frac{1-(-1)^{3r}}{2} = \frac{1-1}{2}$

$= \frac{0}{2} = 0$

এখানে, r বিজোড় হলে, $u_r = \frac{1-(-1)^{3r}}{2} = \frac{1-(-1)}{2}$

$= \frac{2}{2} = 1$

Ans. 0, 1 এবং 0 (r জোড় হলে), 1 (r বিজোড় হলে)

প্রশ্ন ॥ ৯ ॥ একটি অনুক্রমের n তম পদ, $u_n = \frac{1}{n}$

ক. $u_n < 10^{-5}$ হলে n এর মান কিরূপ হবে?

খ. $u_n > 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে?

গ. u_n এর প্রান্তীয় মান (n যথেচ্ছ বড় হলে) সম্পর্কে কী বলা যায়?

সমাধান :

ক. দেওয়া আছে, $u_n = \frac{1}{n}$

এখানে, $u_n < 10^{-5}$

বা, $\frac{1}{n} < 10^{-5}$

বা, $\frac{1}{n} < \frac{1}{10^5}$

বা, $n > 10^5$ [বিপরীতকরণ করে]

$\therefore n > 10^5$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $u_n = \frac{1}{n}$

এখানে, $u_n > 10^{-5}$

বা, $\frac{1}{n} > 10^{-5}$

বা, $\frac{1}{n} > \frac{1}{10^5}$

বা, $n < 10^5$ [বিপরীতকরণ করে]

$\therefore n < 10^5$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $u_n = \frac{1}{n}$

$u_n = \frac{1}{n}$ সমীকরণে n এর মান যত বড় হবে u_n এর মান তত ছোট হবে। এভাবে n এর মান যথেচ্ছ বড় হতে থাকলে u_n এর মান এক সময় শূন্য (0) হবে সুতরাং u_n এর প্রান্তীয় মান, 0 **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১০ ॥ গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে দেখাও যে, $r \neq 1$ হলে, গুণোত্তর ধারা $a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$ এর n তম আংশিক সমষ্টি, $S_n = a.\frac{1 - r^n}{1 - r}$

সমাধান : গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে দেখাতে হবে যে, $a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$ এর n তম আংশিক সমষ্টি,

$S_n = \frac{a.(a - r^n)}{1 - r}$ যখন $r \neq 1$

অর্থাৎ, দেখাতে হবে যে, $a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

[যখন $r \neq 1$]

এখানে, $a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ ......(i)

প্রথম ধাপ :

$n = 1$ এর জন্য (i) এর বামপক্ষ $= a$

এবং ডানপক্ষ $= \frac{a(1 - r^1)}{1 - r} = \frac{a(1 - r)}{1 - r} = a$

সুতরাং $a = 1$ এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য।

দ্বিতীয় ধাপ :

ধরি $n = m$ এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য।

অর্থাৎ $a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{m-1} = \frac{a(1 - r^m)}{1 - r}$ ....(ii)

এখন (i) বাক্যটি $n = m + 1$ এর জন্য সত্য হবে যদি,

$a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{m+1-1}$

$= \frac{a(1 - r^{m+1})}{1 - r}$

বা, $a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^m$

$= \frac{a(1 - r^{m-1})}{1 - r}$ ....(iii) সত্য হয়।

(ii) এর উভয় পক্ষে ar^m যোগ করে পাই,

$a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{m-1} + ar^m$

$= \frac{a(1 - r^m)}{1 - r} + ar^m$

বা, $a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{m-1} + ar^m$

$= \frac{a(1 - r^m) + (1 - r)ar^m}{1 - r}$

$= \frac{a - ar^{m+1}}{1 - r}$

$= \frac{a(1 - r^{m+1})}{1 - r}$

$\therefore$ (iii) প্রমাণিত হলো, অর্থাৎ $n = m + 1$ এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য

সুতরাং গাণিতিক আরোহ বিধি অনুযায়ী সকল $n \in N$ এর জন্য $r \neq 1$ হলে গুণোত্তর ধারা $a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$ এর n তম আংশিক সমষ্টি $=$

$\frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ১১ ॥ প্রদত্ত অসীম গুণোত্তর ধারার (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে, তবে তা নির্ণয় কর :

ক. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$

খ. $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{4}{5^3} - \frac{8}{5^4} + ...$

গ. $8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + ...$

ঘ. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ...$

ঙ. $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{16}\right) + ...$

সমাধান : ক. দেওয়া আছে, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$

প্রদত্ত গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$

এখানে, $r = \frac{1}{2}$ অর্থাৎ $r < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

$\therefore$ ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1 - r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$

$= 1 \times 2 = 2$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{4}{5^3} - \frac{8}{5^4} + ...$

গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{5}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-2}{5^2} \div \frac{1}{5} = \frac{-2}{25} \times \frac{5}{1} = -\frac{2}{5}$

এখানে, $r = -\frac{2}{5}$, অর্থাৎ $r < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

$\therefore$ ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$

$= \frac{\frac{1}{5}}{1 - \left(-\frac{2}{5}\right)}$

$= \frac{\frac{1}{5}}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5 + 2}{5}}$

$= \frac{1}{5} \times \frac{5}{7}$

$= \frac{1}{7}$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + ...$

গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = 8$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

এখানে, $r = \frac{1}{4}$ অর্থাৎ $r < 1$

স্তরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

$\therefore$ ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1 - r} = \frac{8}{1 - \frac{1}{4}}$

$= \frac{8}{\frac{4 - 1}{4}} = 8 \times \frac{4}{3}$

$= \frac{32}{3}$ **(Ans.)**

ঘ. দেওয়া আছে, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ...$

গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{2}{1} = 2$

এখানে, $r = 2$, অর্থাৎ $r > 1$

সুতরাং প্রদত্ত গুণোত্তর ধারার (অসীমতক) সমষ্টি নেই।

ঙ. দেওয়া আছে, $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{16}\right) + ...$

গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{2}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = -\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{4} \times 2 = -\frac{1}{2}$

এখানে, $r = -\frac{1}{2}$, অর্থাৎ $r < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

$\therefore$ ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$= \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১২ ॥ নিচের ধারাগুলোর প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর :

ক. 7 + 77 + 777 + ...

খ. 5 + 55 + 555 + ...

সমাধান :

ক. প্রদত্ত ধারা: 7 + 77 + 777 + ...

মনে করি, প্রদত্ত ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল, S_n

$\therefore S_n = 7 + 77 + 777 + ...$n তম পদ পর্যন্ত

বা, $S_n = 7(1 + 11 + 111 + ...$ n তম পদ পর্যন্ত)

বা, $S_n = \frac{7}{9}(9 + 99 + 999 + ...$ n তম পদ পর্যন্ত)

বা, $\frac{9}{7} S_n = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + ...$ n তম পদ পর্যন্ত।

$= (10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n) - (1 + 1 + 1 + ...$ n তম পদ পর্যন্ত)

$= 10(1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{n-1}) - n$

$= 10.\frac{10^n - 1}{10 - 1} - n$ $\left[\frac{a(r^n-1)}{r-1}\right.$ সূত্র প্রয়োগ করে$\left.\right]$

$= \frac{10}{9}(10^n - 1) - n$

$\therefore S_n = \frac{10}{9} \times \frac{7}{9}(10^n - 1) - \frac{7n}{9}$

$\therefore S_n = \frac{70}{81}(10^n - 1) - \frac{7n}{9}$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম n পদের যোগফল $= \frac{70}{81}(10^n - 1) - \frac{7n}{9}$ **(Ans.)**

খ. প্রদত্ত ধারা: 5 + 55 + 555 + ...

মনে করি, প্রদত্ত ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল, S_n

$\therefore S_n = 5 + 55 + 555 + ...$ n তম পদ পর্যন্ত

$= \frac{5}{9}(9 + 99 + 999 + ...$ n তম পদ পর্যন্ত)

$= \frac{5}{9}\{(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) ....$ n তম পদ পর্যন্ত)

$= \frac{5}{9}\{(10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n) - (1 + 1 + 1 + ...$ n তম পদ পর্যন্ত)}

$= \frac{5}{9} \times 10(1 + 10 + 10^2 .... + 10^{n-1}) - \frac{5n}{9}$

$= \frac{50}{9} \times 1.\frac{10^n - 1}{10 - 1} - \frac{5n}{9}$ $\left[\frac{a(r^n-1)}{r-1}\right.$ সূত্র প্রয়োগ করে$\left.\right]$

$= \frac{50}{9 \times 9}(10^n - 1) - \frac{5n}{9}$

$\therefore S_n = \frac{50}{81}(10^n - 1) - \frac{5n}{9}$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম n পদের যোগফল $= \frac{50}{81}(10^n - 1) - \frac{5n}{9}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৩ ॥ x-এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$ + ... অসীম ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + ...$ ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(x+1)^2} \div \frac{1}{x+1}$

$= \frac{1}{(x+1)(x+1)} \times \frac{x+1}{1}$

$= \frac{1}{x+1}$

এখন প্রদত্ত ধারার (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয় অর্থাৎ $-1 < r < 1$ হয়,

বা, $-1 < \frac{1}{x+1} < 1$ হয় $\left[r = \frac{1}{x+1}\right.$ বসিয়ে$\left.\right]$

এখন, $-1 < \frac{1}{x+1}$

বা, $\frac{1}{-1} > x + 1$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $-1 > x + 1$

বা, $-1 - 1 > x + 1 - 1$ [উভয়পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে]

বা, $-2 > x$

$\therefore x < -2$

অথবা, $\frac{1}{x+1} < 1$

বা, $x + 1 > 1$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $x + 1 - 1 > 1 - 1$ [উভয়পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে]

$\therefore x > 0$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $x < -2$ অথবা, $x > 0$ হয়।

$\therefore$ ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{x+1}}{1 - \frac{1}{x+1}}$

$= \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x+1-1}{x+1}} = \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x+1}}$

$= \frac{1}{x+1} \times \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x}$

$\therefore$ যখন $x > 0$ অথবা, $x < -2$ তখন ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি $\frac{1}{x}$

Ans. শর্ত $x < -2$ অথবা $x > 0$ এবং সমষ্টি $\frac{1}{x}$

প্রশ্ন ॥ ১৪ ॥ প্রদত্ত পৌনঃপুনিক দশমিকগুলোকে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর :

(ক) $.\dot{2}\dot{7}$ **(খ)** $2.\dot{3}0\dot{5}$ **(গ)** $.\dot{0}12\dot{3}$ **(ঘ)** $3.\dot{0}40\dot{3}$

সমাধান:

(ক) $0.\dot{2}\dot{7} = 0.272727 \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= 0.27 + 0.0027 + 0.000027 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

যা একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

এখানে, প্রথম পদ, $a = 0.27$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{0.0027}{0.27} = 0.01$

$\therefore 0.\dot{2}\dot{7} = \frac{a}{1-r} = \frac{0.27}{1-0.01}$

$= \frac{0.27}{0.99} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$ **(Ans.)**

(খ) $2.\dot{3}0\dot{5} = 2.305\ 305\ 305\ 305 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= 2 + (0.305 + 0.000305 + 0.000000305 + \ldots\ldots)$

এখানে, বন্ধনীর অভ্যন্তরের ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 0.305$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{0.000305}{0.305} = 0.001$

$\therefore 2.\dot{3}0\dot{5} = 2 + \frac{a}{1-r} = 2 + \frac{0.305}{1-0.001}$

$= 2 + \frac{0.305}{0.999}$

$= 2 + \frac{305}{999} = \frac{1998 + 305}{999}$

$= \frac{2303}{999} = 2\frac{305}{999}$ **(Ans.)**

(গ) $0.\dot{0}12\dot{3} = 0.0123123123$

$= 0.0123 + 0.0000123 + 0.0000000123 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

যা একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

এখানে, প্রথম পদ, $a = 0.0123$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{0.0000123}{0.0123} = 0.001$

$\therefore 0.\dot{0}12\dot{3} = \frac{a}{1-r} = \frac{0.0123}{1-0.001}$

$= \frac{0.0123}{0.999} = \frac{123}{9990} = \frac{41}{3330}$ **(Ans.)**

(ঘ) $3.\dot{0}40\dot{3} = 3.0403404030403$

$= 3 + (0.0403 + 0.0000403 + .0000000403 + \ldots\ldots)$

এখানে, বন্ধনীর অভ্যন্তরের ধারাটি একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 0.0403$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{0.0000403}{0.0403} = 0.001$

$\therefore 3.\dot{0}40\dot{3} = 3 + \frac{a}{1-r}$

$= 3 + \frac{0.0403}{1-.001}$

$= 3 + \frac{0.0403}{0.999}$

$= 3 + \frac{403}{9990}$

$= \frac{29970 + 403}{9990}$

$= \frac{30373}{9990}$

$= 3\frac{403}{9990}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৫ ॥ একটি অনুক্রমের n তম পদ $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$

ক. ধারাটি নির্ণয় করে সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

খ. ধারাটির 15 তম পদ এবং ১ম 10 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর এবং n এর মান যথেষ্ট ছোট হলে U_n এর প্রান্তীয় মান সম্পর্কে কি বলা যায়?

সমাধান :

ক. দেওয়া আছে, ধারাটির n তম পদ $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$n = 1$ হলে, ধারাটির ১ম পদ, $U_1 = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$

$n = 2$ হলে, ,, ২য় পদ, $U_2 = \frac{1}{2(2+1)} = \frac{1}{6}$

$n = 3$ হলে, ,, ৩য় পদ, $U_3 = \frac{1}{3(3+1)} = \frac{1}{12}$

....

....

....

$\therefore$ ধারাটি হলো $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\therefore$ এখানে, দ্বিতীয় পদ ÷ ১ম পদ $= \frac{1}{6} \div \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{6} \times \frac{2}{1}$

$= \frac{1}{3}$

আবার, তৃতীয় পদ ÷ ২য় পদ $= \frac{1}{12} \div \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{12} \times \frac{6}{1}$

$= \frac{1}{2}$

দেখা যাচ্ছে ধারাটির সাধারণ অনুপাত নেই। সুতরাং এটি গুণোত্তর ধারা নয়।

খ. ধারাটির 15 তম পদ $U_{15} = \frac{1}{n(n+1)}$

$= \frac{1}{15(15+1)} = \frac{1}{240}$

এখন $U_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

সুতরাং ১ম 10 পদের সমষ্টি, $S_{10} = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots + U_{10}$

$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right)$

$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{11}\right) = \frac{10}{11}$

$\therefore$ 15 তম পদ $u_{15} = \frac{1}{240}$

এবং ১ম 10 পদের সমষ্টি = $\frac{10}{11}$ **(Ans.)**

(গ) $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots + u_n$

$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

$\therefore S_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$

$\therefore n \to \infty$ (অসীম) হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি,

$S_\infty = \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}}$

$= \frac{1}{1+0} = 1$ [$\because \frac{1}{\infty} = 0$]

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি 1 **(Ans.)**

$U_n = \frac{1}{n(n+1)}$ এখানে দেখা যায় যে, n এর মান বৃদ্ধি পেলে U_n এর মান হ্রাস পায় এবং n এর মান হ্রাস পেলে U_n এর মান বৃদ্ধি পায়। n এর মান যথেষ্ট ছোট হলে U_n এর প্রান্তীয় মান পাওয়া যায় না অর্থাৎ অসীমের দিকে ধাবিত হবে।

প্রশ্ন ॥ ১৬ ॥ নিম্নের ধারাটি লক্ষ কর :

$$\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^3} + \dots\dots\dots$$

ক. x = 1 হলে ধারাটি নির্ণয় কর এবং প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত?

খ. ক নং এ প্রাপ্ত ধারাটির 10 তম পদ এবং ১ম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক. প্রদত্ত ধারা : $\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^3} + \dots\dots\dots$

x = 1 হলে, প্রদত্ত ধারাটি হবে,

$\frac{1}{2.1+1} + \frac{1}{(2.1+1)^2} + \frac{1}{(2.1+1)^3} + \dots\dots\dots$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\dots\dots$ **(Ans.)**

পাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত = ২য় পদ ÷ ১ম পদ

$= \frac{1}{3^2} \div \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3^2} \times \frac{3}{1}$

$= \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

খ. 'ক' নং এ প্রাপ্ত ধারা :

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\dots\dots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{3}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{3}$

$\therefore$ ধারাটির 10 তম পদ $= ar^{10-1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^9} = \frac{1}{3^{10}} = \frac{1}{59049}$ **(Ans.)**

আবার, সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{3}$ অর্থাৎ $r < 1$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 10 পদের সমষ্টি $= \frac{a(1-r^{10})}{1-r}$

$= \frac{\frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$

$= \frac{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right)}{\frac{3-1}{3}}$

$= \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3^{10}-1}{3^{10}}\right)}{\frac{2}{3}}$

$= \frac{3^{10}-1}{3 \times 3^{10}} \times \frac{3}{2}$

$= \frac{59048}{2 \times 59049}$

$= \frac{29524}{59049}$ **(Ans.)**

গ. প্রদত্ত ধারা: $\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^3} + \dots\dots$

গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{2x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(2x+1)^2} \div \frac{1}{2x+1}$

$= \frac{1}{(2x+1)^2} \times \frac{2x+1}{1} = \frac{1}{2x+1}$

প্রদত্ত গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ $-1 < r < 1$

বা, $-1 < \frac{1}{2x+1} < 1$

এখন, $-1 < \frac{1}{2x+1}$ হলে,

বা, $\frac{1}{-1} > 2x+1$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $-1 > 2x + 1$

বা, $-1 - 1 > 2x$

বা, $-2 > 2x$

বা, $-1 > x$

$\therefore x < -1$

আবার, $\frac{1}{2x+1} < 1$ হলে,

বা, $2x+1 > 1$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $2x > 1 - 1$

বা, $2x > 0$

$\therefore x > 0$

$\therefore$ ধারাটি অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $x < -1$ অথবা $x > 0$ হয়

এখন ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}}$

$= \dfrac{\frac{1}{2x+1}}{\frac{2x+1-1}{2x+1}}$

$= \dfrac{1}{2x+1} \times \dfrac{2x+1}{2x}$

$= \dfrac{1}{2x}$

Ans. $x < -1$ অথবা, $x > 1$ হলে সমষ্টি $\dfrac{1}{2x}$

গুরুত্বপূর্ণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১. কোনো অনুক্রমের n তম পদ $\dfrac{1}{2n-1}$ হলে এর 12 তম পদ কোনটি?

ⓚ 23 ⓛ 12 ⓜ $\dfrac{1}{12}$ ● $\dfrac{1}{23}$

২. একটি গুণোত্তর ধারার ১ম পদ $\dfrac{1}{2}$ এবং অসীমতক সমষ্টি $\dfrac{3}{4}$ হলে সাধারণ অনুপাত কত?

ⓚ $\dfrac{2}{9}$ ● $\dfrac{1}{3}$ ⓜ $\dfrac{3}{8}$ ⓝ $\dfrac{2}{3}$

৩. $a + ar + ar^2 + ...$ অসীম গুণোত্তর ধারাটির সমষ্টি থাকার শর্ত কী?

ⓚ $r > 1$ ⓛ $r < -1$
● $-1 < r < 1$ ⓝ $0 < r < r$

৪. $1 - 1 + 1 - 1 + ...$ অসীম ধারাটির আংশিক সমষ্টি কত? (যখন n বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা)

ⓚ -1 ⓛ 0 ● 1 ⓝ n

৫. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ...$ সিরিজটির সাধারণ পদ কোনটি?

ⓚ $\dfrac{1}{n}$ ⓛ $\dfrac{1}{2n}$ ⓜ $\dfrac{2}{n}$ ● $\dfrac{1}{2^n - 1}$

৬. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত হবে?

ⓚ 1 ● 2 ⓜ 3 ⓝ 4

৭. $1, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{7} ....$ অনুক্রমটির সাধারণ পদ কোনটি?

● $\dfrac{n}{2n-1}$ ⓛ $\dfrac{1}{2n-1}$ ⓜ $\dfrac{n+1}{2n+1}$ ⓝ $\dfrac{n-1}{2n+1}$

৮. $5 - 5 + 5 - 5 + 5 - ....$ ধারাটির চতুর্থ আংশিক সমষ্টি কত?

ⓚ -5 ● 0 ⓜ 5 ⓝ 20

৯. কোন ধারার অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি–

ⓚ $r > 1$ ● $-1 < r < 1$ ⓜ $r = 0$ ⓝ $r = 1$

১০. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{3^4} + ...$ ধারার অসীমতক সমষ্টি কত?

ⓚ $\dfrac{1}{3}$ ● $\dfrac{1}{2}$ ⓜ 2 ⓝ নেই

১১. $a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$

i. একটি অসীম গুণোত্তর ধারা
ii. ধারাটির n-তম পদ $= ar^{n-1}$
iii. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}, r < 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

● i ও ii ⓛ ii ও iii ⓜ i ও iii ⓝ i, ii ও iii

১২. $1 + 3 + 9 + 27 + ...$ ধারাটি–

i. একটি গুণোত্তর ধারা
ii. এর অসীমতক সমষ্টি রয়েছে
iii. এর প্রথম পাঁচটি পদের সমষ্টি 121

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ⓛ i ও ii ⓜ ii ও iii ● i ও iii

১৩. $1 - 1 + 1 - 1 + ...$ ধারাটির–

i. ৫ম পদ 1
ii. ১০ম পদ -1
iii. ১ম সতেরটি পদের সমষ্টি 1

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ ii ও iii ⓜ i ও iii ● i, ii ও iii

১৪. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + ...$ গুণোত্তর ধারার–

i. সাধারণ অনুপাত $\dfrac{1}{2}$
ii. সপ্তম পদ $\dfrac{1}{2}$
iii. অসীমতক সমষ্টি 2

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ● i ও iii ⓜ ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

১৫. $1 + 4 + 7 + 10 + ...$

i. এটি একটি সমান্তর অসীম ধারা
ii. ধারাটির সপ্তম পদ 19
iii. প্রথম 5টি পদের সমষ্টি 32

নিচের কোনটি সঠিক?

● i ও ii ⓛ ii ও iii ⓜ i ও iii ⓝ i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে ১৬ ও ১৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} .....$অসীম ধারা।

১৬. ধারাটির ৮ম পদ কত হবে?

ⓚ $\dfrac{1}{32}$ ⓛ $\dfrac{1}{64}$ ● $\dfrac{1}{128}$ ⓝ $\dfrac{1}{256}$

১৭. ধারাটির পঞ্চম পদের সমষ্টি কত হবে?

ⓚ $\dfrac{16}{31}$ ⓛ $\dfrac{8}{31}$ ⓜ $\dfrac{31}{8}$ ● $\dfrac{31}{16}$

নিচের তথ্যের আলোকে ১৮ – ২০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$8 + 2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{32} + ...$

১৮. ধারাটির 10তম পদ কোনটি?

ⓚ $\dfrac{1}{2^7}$ ⓛ $\dfrac{1}{2^{11}}$ ⓜ $\dfrac{1}{2^{13}}$ ● $\dfrac{1}{2^{15}}$

১৯. ধারাটির প্রথম 5টি পদের সমষ্টি কত?

ক $\frac{2^{10}-1}{2^8\times 3}$ ● $8\frac{2^{10}-1}{2^8\times 3}$ গ $\frac{2^8\times 3}{2^{10}\times 1}$ ঘ $\frac{2^8\times 3}{2^{10}-1}$

২০. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?

ক $\frac{19}{2}$ ● $\frac{32}{3}$ গ $\frac{34}{3}$ ঘ $\frac{38}{3}$

অনুক্রম

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

২১. $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots$ বাস্তব সংখ্যার একটি অনুক্রম হলে $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$ কে বাস্তব সংখ্যার কোন ধারা বলা হয়? (সহজ)

● অনন্ত খ সমান্তর গ সান্ত ঘ সসীম

২২. u_n এর উপাদানগুলোর অনুক্রম নিচের কোনটি? (সহজ)

ক $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$
খ $u_n, u_{n-1}, u_{n+1}, \ldots\ldots u_1, u_2 \ldots\ldots$
● $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots$
ঘ $u_1 + au_2, + a^2u_3 + \ldots\ldots + a^nu_n + \ldots\ldots$

২৩. 2, 4, 6, 8, 10, ... , 2n, ... অনুক্রমটির 10 তম পদ কত? (সহজ)

ক 10 ● 20 গ 30 ঘ 2n

২৪. 2, 4, 6, 8, 10, ... , 2n, ... অনুক্রমটির n তম পদ, u_n = কত? (সহজ)

● 2n খ n গ n + 2 ঘ $\frac{1}{2n}$

২৫. 1, 3, 5, 7, 9, ... অনুক্রমটির k তম পদ কত? (মধ্যম)

ক 2k + 1 ● 2k – 1 গ 2k ঘ 3k

২৬. 1, 3, 5, 7, 9, ... অনুক্রমটির 1000 তম পদ কত? (মধ্যম)

ক 990 খ 999 ● 1999 ঘ 2000

২৭. 3, 5, 7, 9, ... অনুক্রমের 10 তম পদ কত? (সহজ)

ক 15 ● 21 গ 24 ঘ 18

২৮. সাধারণ পদ $\frac{1}{3^n}$ এর অনুক্রম নিচের কোনটি? (সহজ)

ক $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, -\frac{1}{3^4}, \ldots\ldots$ খ $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \ldots\ldots$
● $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \ldots\ldots$ ঘ $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^4}, \ldots\ldots$

২৯. কোনো অনুক্রমের n তম পদ $U_n < \frac{1}{n}$ এবং $u_n = 10^{-3}$ হলে n এর মান কত? (মধ্যম)

ক $n < 10^{-3}$ ● $n < 10^3$ গ $n > 10^{-3}$ ঘ $n > 10^3$

৩০. কোনো অনুক্রমের n তম পদ $U_n = \frac{1}{n}$ এবং $u_n > 10^{-7}$ হলে n এর মান কত? (মধ্যম)

ক $n < 10^{-7}$ ● $n < 10^7$ গ $n > 10^{-7}$ ঘ $n > 10^7$

৩১. কোনো অনুক্রমের পদ সংখ্যা– (সহজ)

ক সীমিত ● অসীম গ সমান ঘ অসীম নয়

৩২. গুণোত্তর ধারার n তম পদের সূত্র নিচের কোনটি? (সহজ)

● ar^{n-1} খ ar^n গ ar^{n-2} ঘ $\frac{ar^{n-1}}{r}$

৩৩. $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ সাধারণ পদটির অনুক্রম কোনটি? (সহজ)

ক $\cos, \frac{n\pi}{2}, \cos\frac{(n-1\pi)}{2}, \ldots\ldots$ ● $\cos\frac{\pi}{2}, \cos\pi, \cos\frac{3\pi}{2}$
গ $\cos\pi, \cos\frac{\pi}{2}, \cos\frac{3\pi}{2}$ ঘ $\cos2\pi, \cos\pi, \cos\frac{\pi}{2} \ldots\ldots$

৩৪. 0, 2, 0, 2, 0.......... অনুক্রমটির সাধারণ পদ নিচের কোনটি? (সহজ)

ক $1 + (1)^n$ ● $1 + (-1)^n$
গ $1 - (-1)^n$ ঘ $(-1)^n + (-1)$

৩৫. নিচের কোনটি অনুক্রম? (সহজ)

● 1, 2, 3, 4 ------ খ $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\frac{1}{26}$ ------
গ 3 – 1 + (– 1) – 3 ------ ঘ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}$ ------

৩৬. কোনো একটি অনুক্রমকে $f_n = n^2$ আকারে লেখা হলে অনুক্রমটির সাধারণ পদ কোনটি? (সহজ)

ক n ● n^2 গ (n + 1) ঘ $(n + 1)^2$

৩৭. কোনো অনুক্রমের n তম পদ $u_n = \frac{n^2}{n+1}$ হলে এর ৫ম পদ কত? (সহজ)

ক $\frac{5}{3}$ খ $\frac{25}{4}$ ● $\frac{25}{6}$ ঘ $\frac{16}{25}$

৩৮. 1 + (– n) সাধারণ পদের অনুক্রম কোনটি? (সহজ)

ক 1, 0, 1, 0 খ 0, 1, 0, 1
গ 2, 0, 2, 0 ● 0, 2, 0, 2

৩৯. 4, 6, 8, 10----- অনুক্রমটির পদগুলোর যোগফল কিরূপ ধারা? (সহজ)

● সমান্তর খ অনুপাতিক গ গুণোত্তর ঘ অসীম

৪০. 1, 3, 5, 7, 9 ------ অনুক্রমের 10 তম পদ কত? (মধ্যম)

● 21 খ 24 গ 27 ঘ 30

৪১. কোনো অনুক্রমের n তম পদ $\frac{1-(-1)^n}{2}$ হলে এর 21 তম পদ কোনটি? (সহজ)

ক – 1 ● 1 গ 2 ঘ – 11

৪২. $1 + (-1)^n$ সাধারণ পদবিশিষ্ট অনুক্রমের পঞ্চম পদ কত? (সহজ)

ক 1 খ – 1 গ 2 ● 0

ব্যাখ্যা : যেকোনো ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার ঘাত বিজোড় পূর্ণসংখ্যা হলে ঋণাত্মক সংখ্যাই পাওয়া যাবে আবার ঘাত জোড় পূর্ণসংখ্যা হলে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা পাওয়া যাবে।

৪৩. $2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} ------\right)$ অনুক্রমের 8 তম পদ কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{16}$ খ $\frac{1}{32}$ গ $\frac{1}{64}$ ● $\frac{1}{128}$

ব্যাখ্যা : অনুক্রমটি $= 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^{n-1}}$

$\therefore$ 8 তম পদ $= \frac{1}{2^{8-1}} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$

৪৪. $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ ----- অনুক্রমটির 7 তম পদ কোনটি? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{37}$ ● $\frac{1}{50}$ গ $\frac{1}{65}$ ঘ $\frac{1}{82}$

ব্যাখ্যা : অনুক্রমটির সাধারণ পদ $= \frac{1}{n^2+1}$

$\therefore$ অনুক্রমটির 7 তম পদ $= \frac{1}{7^2+1} = \frac{1}{50}$

৪৫. $\frac{1_n n}{n}$ অনুক্রমটির প্রথম পদ কত? (সহজ)

● 0 খ 1 গ – 1 ঘ 10

৪৬. cos(nπ) সাধারণ পদবিশিষ্ট অনুক্রমটি নিচের কোনটির সমান? (সহজ)

ক $(1)^n$ ● $(-1)^n$ গ $(-1)^{2n}$ ঘ $(-1)^{n-1}$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৪৭. 3, 5, 7, 9, ...

i. অনুক্রমটি একটি সমান্তর অনুক্রম

ii. অনুক্রমটির r তম পদ 2r + 1

iii. অনুক্রমটির 15 তম পদ 31

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

৪৮. 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...

i. অনুক্রমটির 10 তম পদ =1

ii. অনুক্রমটির 15 তম পদ = 0

iii. অনুক্রমটির 18 তম পদ = 0

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৪৯. অনুক্রমের ক্ষেত্রে–

i. পদগুলোর সাথে গাণিতিক চিহ্ন ব্যবহার করে অসীম ধারা পাওয়া যায়

ii. এর পদ সংখ্যা অসীম

iii. কোনো সাধারণ পদ থাকে না

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii গ i ও iii ● i, ii ও iii

৫০. $1 - (-1)^n$ সাধারণ পদবিশিষ্ট–

i. অনুক্রমটি 2, 0, 2, 0, 2 ....

ii. অনুক্রমটির 9 তম পদ 2

iii. অনুক্রমটির 50 তম পদ 0

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

ব্যাখ্যা : n = 1 হলে $1 - (-1)^1 = 2$

n = 2 হলে $1 - (-1)^2 = 0$

n = 3 হলে $1 - (-1)^3 = 2$

... ...

... ...

(i) নং সঠিক

(ii) নং সঠিক, n = 9 হলে $1 - (-1)^9 = 2$

(iii) নং সঠিক, n = 50 হলে $1 - (-1)^{50} = 0$

জেনে রাখি : অনুক্রমটির যেকোনো জোড় পদ 0 এবং বিজোড় পদ 2

৫১. কোনো অনুক্রমের n তম পদ $u_n = \frac{1}{2}$ এবং $u_n < 10^{-8}$ হলে–

i. $n > 10^8$

ii. $\frac{1}{n} < \left(\frac{1}{10}\right)^8$

iii. $\frac{1}{n} < 10^{-8}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii ● i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা : $u_n = \frac{1}{n}$ হলে $u_n < 10^{-8}$

$\therefore \frac{1}{n} < 10^{-8}$ .... (iii) নং সঠিক

$\therefore n > 10^8$ .... (i) নং সঠিক

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

1, 3, 5, 7, 9, ...

উপরের তথ্যের আলোকে ৫২ ও ৫৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৫২. অনুক্রমটির 10তম পদ কত? (মধ্যম)

ক 16 ● 19 গ 18 ঘ 20

৫৩. অনুক্রমটির r–তম পদ u_r = কত? (সহজ)

ক 2r + 1 খ 2r গ $2r^{-1}$ ● 2r – 1

$4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \frac{4}{81}, ...$

উপরের তথ্যের আলোকে ৫৪–৫৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৫৪. অনুক্রমটির সাধারণ অনুপাত = ? (সহজ)

● $\frac{1}{3}$ খ $\frac{1}{4}$ গ 4 ঘ $\frac{4}{3}$

৫৫. অনুক্রমটির 10 তম পদ, u_{10} = ? (মধ্যম)

● 0.0002032 খ 2.032×10^{-5}

গ 2.032×10^4 ঘ 2.032×10^5

৫৬. অনুক্রমটির 15 তম পদ, u_{15} = ? (মধ্যম)

● 8.36×10^{-7} খ 8.36×10^{-6}

গ 8.36×10^8 ঘ 8.36×10^7

কোনো অনুক্রমের n তম পদ, $u_n = \frac{1}{n}$

উপরের তথ্যের আলোকে ৫৭–৫৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৫৭. u_{100} এর মান কত? (সহজ)

ক 0.1 ● 0.01 গ 0.001 ঘ 0.0001

৫৮. $u_n < 10^{-5}$ হলে এর মান কিরূপ হবে? (সহজ)

● $n > 10^5$ খ n >10 গ $n = 10^5$ ঘ $n < 10^5$

৫৯. u_n-এর প্রান্তীয় মান কত? [যখন n যথেচ্ছ বড়] (মধ্যম)

ক 1 ● 0 গ 0.01 ঘ 0.1

নিচের তথ্যের আলোকে ৬০–৬২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

একটি অনুক্রমের n তম পদ হলো $\frac{1-(-1)^n}{2}$

৬০. অনুক্রমের 15 তম পদ হলো– (মধ্যম)

ক – 1 খ 0 ● 1 ঘ 2

৬১. অনুক্রমের 20 তম পদ হলো– (মধ্যম)

ক – 1 ● 0 গ $\frac{1}{2}$ ঘ 1

৬২. উপরের তথ্য অনুসারে অনুক্রমটি হলো– (সহজ)

ক 0 + 1 + 2 + 3..... গ 0 + 1 + 0 + 1 + ...

গ 1 + 2 + 3 + 4 + ... ● 1 + 0 + 1 + 0 + ...

নিচের তথ্যের আলোকে ৬৩–৬৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

একটি অনুক্রমের সাধারণ পদ {6 – 2n}

৬৩. অনুক্রমটি নিচের কোনটি? (মধ্যম)

● 4, 2, 0, – 2 খ 4, – 2, 0, – 2

গ – 4, – 2, 0, – 0 ঘ – 4, 2, 0, – 2

ব্যাখ্যা : ১ম পদ = 6 – 2.1 = 4

২য় পদ = 6 – 2.2 = 2

৩য় পদ = 6 – 2.3 = 0

৪র্থ পদ = 6 – 2.4 = – 2

৬৪. অনুক্রমটির 100 তম পদ কত? (মধ্যম)

ক 194 ● – 194 গ 206 ঘ – 204

ব্যাখ্যা : 100 তম পদ = 6 – 2.100 = 100 = – 194

৬৫. অনুক্রমটির প্রথম তিনটি পদের যোগফল কত? (মধ্যম)

ক 2 খ – 2 ● 6 ঘ – 6

ধারা

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৬৬. **নিচের কোনটি অনন্ত ধারা?** (সহজ)

● $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$
(খ) u_1, u_2, u_3 .... , u_n, ...
(গ) $u_1 + au_2 + a^2u_3 + ...$
(ঘ) $u_1 + u_2 + u_3$ .... , u_{10}, ...

৬৭. **$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$ = কত?** (সহজ)

● $\frac{n(n+1)}{2}$ (খ) $\frac{n^2(n+1)^2}{2}$ (গ) $n(n+1)$ (ঘ) n^2

৬৮. **$1 + 2 + 3 + 4 + ...$ ধারার S_{10} = কত?** (মধ্যম)

● 55 (খ) 50 (গ) 44 (ঘ) 56

৬৯. **$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ ধারাটির ২য় আংশিক সমষ্টি কত?** (সহজ)

(ক) 1 ● $1\frac{1}{2}$ (গ) 2 (ঘ) $\frac{1}{2}$

৭০. **$a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$ ধারাটির ক্ষেত্রে $r \neq 1$ হলে S_n = কত?** (সহজ)

● $\frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ (খ) $\frac{a(1 + r^n)}{1 - r}$ (গ) $\frac{a}{1 + r}$ (ঘ) $\frac{1 + r^n}{a}$

৭১. **$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...$ অনন্ত গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?** (কঠিন)

(ক) 1 ● 2 (গ) 0 (ঘ) 6

৭২. **$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ...$ অনন্ত গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?** (কঠিন)

(ক) $\frac{1}{3}$ (খ) 1 ● $\frac{1}{2}$ (ঘ) 0

৭৩. **$12 + 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + ...$ গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?** (কঠিন)

● 18 (খ) $\frac{9}{10}$ (গ) 0.012 (ঘ) $\frac{10}{7}$

৭৪. **$1 + 0.1 + 0.01 + ...$ গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?** (কঠিন)

● $\frac{10}{9}$ (খ) $\frac{9}{10}$ (গ) 0.012 (ঘ) $\frac{10}{7}$

৭৫. **1, 3, 5, 7, 9, ... সমান্তর প্রগমনের সাধারণ অন্তর কত?** (সহজ)

(ক) 5 (খ) 3 (গ) 9 ● 2

৭৬. **$1 + 0.1 + 0.01 + \cdots\cdots$ অনন্ত গুণোত্তর ধারাটির সমষ্টি কত?** (কঠিন)

● $1\frac{1}{9}$ (খ) $1\frac{1}{3}$ (গ) $2\frac{1}{9}$ (ঘ) $2\frac{1}{3}$

৭৭. **$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots\cdots + 99$ ধারায় কতটি পদ রয়েছে?** (কঠিন)

(ক) 60 (খ) 70 ● 50 (ঘ) 99

৭৮. **$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100$ = কত?** (মধ্যম)

● 5050 (খ) 5500 (গ) 5005 (ঘ) 5550

৭৯. **$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots\cdots$ ধারার ৪র্থ আংশিক সমষ্টি S_4 এর মান কত?** (সহজ)

(ক) 1 (খ) 4 (গ) – 1 ● 0

৮০. **$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots\cdots$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কোনটি?** (কঠিন)

(ক) $\frac{1}{3}$ ● $\frac{1}{2}$ (গ) 6 (ঘ) $\frac{3}{2}$

৮১. **$0{\cdot}5 + 0.05 + 0.005 + ...$ গুণোত্তর ধারার সাধারণ অনুপাত কোনটি?** (সহজ)

(ক) 0.01 (খ) 0.05 (গ) 0.5 ● 0.1

৮২. **কোনো অনুক্রমের n তম পদ, $u_n = \frac{n^2}{n+1}$ এর ৪র্থ পদ কোনটি?** (সহজ)

(ক) $\frac{9}{4}$ (খ) $\frac{12}{5}$ ● $\frac{16}{5}$ (ঘ) $\frac{18}{4}$

৮৩. **সমান্তর ধারার n তম পদ কত?** (সহজ)

(ক) $2a + (n - 1)d$ (খ) $a + (2n - 1)d$
● $a + (n - 1)d$ (ঘ) $a + (n - 1)2d$

৮৪. **সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি কত?** (সহজ)

(ক) $n\{2a + (n - 1)d\}$ ● $\frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$
(গ) $\frac{n}{2}\{a + (n - 1)d\}$ (ঘ) $2n\{2a + (n - 1)d\}$

৮৫. **$r > 1$ হলে, গুণোত্তর অসীম ধারার n পদের সমষ্টি কত?** (সহজ)

(ক) $a\frac{1 - r^n}{1 - r}$ (খ) $a\frac{1 - r^n}{r - 1}$ ● $a\frac{r^n - 1}{r - 1}$ (ঘ) $a\frac{r^n - 1}{1 - r}$

৮৬. **যখন $r < 1$ তখন, গুণোত্তর অসীম ধারার n পদের সমষ্টি কত?** (সহজ)

(ক) $a\frac{r^n - 1}{r - 1}$ ● $a\frac{1 - r^n}{1 - r}$ (গ) $a\frac{r^{n-1}}{1 - r}$ (ঘ) $a\frac{1 - r^n}{r - 1}$

৮৭. **গুণোত্তর অসীম ধারার অসীমতক সমষ্টি থাকবে, যখন–**

(ক) $r > 1$ ● $r < 1$ (গ) $r = 1$ (ঘ) $r > 0$

৮৮. **$5 + 8 + 11 + 14 + ...$ ধারাটির 7টি পদের সমষ্টি কত?** (কঠিন)

(ক) 95 ● 98 (গ) 101 (ঘ) 103

৮৯. **$5 - 5 + 5 - 5 + ...$ ধারাটির চতুর্থ আংশিক সমষ্টি কত?** (সহজ)

● 0 (খ) – 1 (গ) 1 (ঘ) 2

৯০. **রাশি বা পদের সংখ্যার ভিত্তিতে ধারা কত প্রকার?** (সহজ)

● 2 (খ) 3 (গ) 4 (ঘ) 5

৯১. **কোন ধারার অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি r এর মান হয়–** (সহজ)

(ক) $r > 1$ (খ) $r \geq 1$ ● $-1 < r < 1$ (ঘ) $-2 < r < 2$

৯২. **$a = 2, r = \frac{-3}{4}$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?** (মধ্যম)

(ক) $\frac{7}{8}$ ● $\frac{8}{7}$ (গ) $\frac{3}{4}$ (ঘ) $\frac{4}{3}$

৯৩. **$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + ...$ ধারাটির ২য় আংশিক সমষ্টি কত?** (মধ্যম)

(ক) $\frac{1{\cdot}707}{\sqrt{2}}$ (খ) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ ● $\frac{2{\cdot}414}{\sqrt{2}}$ (ঘ) $\frac{2{\cdot}14}{\sqrt{2}}$

৯৪. **একটি অসীম গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ 1 এবং সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?** (কঠিন)

(ক) $\sqrt{2}$ (খ) $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$ ● $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$ (ঘ) $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$

৯৫. **$1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + ...$ ধারাটির 8 তম পদ কোনটি?** (মধ্যম)

(ক) 0.00001 (খ) 0.000001
(গ) 0.0000001 ● 0.00000001

ব্যাখ্যা : 8 তম পদ = $ar^8 = 1 \times (0.1)^8 = 0.00000001$

৯৬. **$1 + 4 + 9 + 16$ .... ধারাকে কী বলে?** (সহজ)

(ক) অসীম ● সসীম (গ) গুণোত্তর (ঘ) অনুক্রম

৯৭. **$3 + 6 + 9 + 12$ .... ধারাটির সাধারণ অন্তর কত?** (সহজ)

(ক) 2 ● 3 (গ) 4 (ঘ) 6

৯৮. **$a + ar + ar^2 + ar^3$ .... গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হলে ধারাটির n তম পদ কোনটি?** (সহজ)

ⓚ ar^2 ⓚh ar^{n+1} ● ar^{n-1} ⓖh ar^{n+2}

৯৯. $a + ar + ar^2 + ar^3$ .... ধারাটির প্রান্তীয় মান পাওয়া যায় না কখন? (সহজ)

ⓚ $r = 0$ ⓚh $r = 1$ ⓖ $r < 1$ ● $r = -1$

১০০. $a = 2$ এবং $r = \frac{1}{2}$ হলে, $a + ar + ar^2 + ar^3$ .... ধারাটির 8 তম পদ কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ $\frac{1}{16}$ ⓚh $\frac{1}{32}$ ● $\frac{1}{64}$ ⓖh $\frac{1}{128}$

ব্যাখ্যা : সাধারণ পদ = ar^{n-1}

8 পদ $= ar^{8-1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 2.\frac{1}{128} = \frac{1}{64}$

১০১. $r > 1$ হলে, $a + ar + ar^2 + ar^3$ .... ধারাটির n পদের সমষ্টি কত? (সহজ)

● $a\frac{r^n - 1}{1 - r}$ ⓚh $a\frac{r^n - 1}{r - 1}$ ⓖ $a\frac{r^n + 1}{1 + r}$ ⓖh $a\frac{1 - r^n}{1 - r}$

১০২. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} +$ .... ধারাটির প্রথম 9টি পদের সমষ্টি কত? (মধ্যম)

ⓚ $\frac{9814}{136294}$ ● $\frac{9841}{236196}$ ⓖ $\frac{9841}{346199}$ ⓖh $\frac{9841}{623169}$

১০৩. সমান্তর ধারার n তম পদের সূত্র কোনটি? (সহজ)

ⓚ $a - (n + 1)d$ ⓚh $\frac{n(n + 1)}{2}$

● $a + (n - 1)d$ ⓖh $\frac{a}{1 - r}$

১০৪. $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} +$ .... ধারাটির তৃতীয় আংশিক সমষ্টি–(মধ্যম)

ⓚ $\frac{4\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}}$ ● $\frac{4 + \sqrt{3}}{3}$ ⓖ $\frac{5 + \sqrt{3}}{3}$ ⓖh $\frac{4 + 3\sqrt{3}}{3}$

ব্যাখ্যা : তৃতীয় আংশিক সমষ্টি $= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}$

$= \frac{4 + \sqrt{3}}{3}$

১০৫. $u_1 + u_2 + u_3 +$ ...... $u_n +$ .... অনন্ত ধারাটির দ্বিতীয় আংশিক সমষ্টি কোনটি? (সহজ)

ⓚ u_1 ● $u_1 + u_2$

ⓖ $u_1 + u_2 + ... + u_n$ ⓖh $u_1 + u_2 + ... u_n + ...$

১০৬. $u_1 + u_2 + u_3 +$ ...... $u_n +$ .... ধারাটির n তম পদ– (সহজ)

● u_n ⓚh s_n ⓖ u_{n-1} ⓖh S_{n-1}

১০৭. কোনো একটি ধারার সাধারণ পদ 6n হলে ধারাটির প্রথম ছয়টি পদের যোগফল কত? (মধ্যম)

ⓚ 36 ⓚh 60 ⓖ 90 ● 126

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১০৮. $1 + 4 + 7 + 10 +$ ....

i. এটি একটি সমান্তর অসীম ধারা

ii. ধারাটির 7ম পদ 19

iii. প্রথম 5টি পদের সমষ্টি 32

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii ⓚh i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖh i, ii ও iii

১০৯. $4 + 8 + 12 + 16 +$ ....

i. এটি একটি সমান্তর ধারা

ii. ধারাটির সাধারণ অন্তর 4

iii. ধারাটির r তম পদ 4r

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ⓚh ii ও iii ⓖ i ও iii ● i, ii ও iii

১১০. $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ .... অসীম ধারা হলে–

i. ২য় আংশিক সমষ্টি $S_2 = 1$

ii. বিজোড় n এর জন্য n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = 1$

iii. জোড় n এর জন্য n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = 0$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ⓚh i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

১১১. i. u_n কে u সাব n পড়া হয়

ii. সসীম ধারাকে সান্ত ধারা বলা হয়

iii. u_n কে u এর পাওয়ার n পড়া হয় (সহজ)

নিচের কোনটি সঠিক?

● i ও ii ⓚh i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖh i, ii ও iii

১১২. $1 + 2 + 3 + 4 +$ .... ধারার–

i. ১ম আংশিক সমষ্টি $S_1 = 1$

ii. ২য় আংশিক সমষ্টি $S_2 = 3$

iii. ৩য় আংশিক সমষ্টি $S_3 = 6$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ⓚh i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

১১৩. $a + ar + ar^2 +$ .... অনন্ত ধারার সমষ্টি–

i. $S = \frac{a}{1 - r}$ যখন $r < 1$

ii. $S = \frac{1 - r}{a}$

iii. $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ যখন $r > 1$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ⓚh i ও ii ● i ও iii ⓖh i, ii ও iii

১১৪. $1 - 1 + 1 - 1 +$ .... অসীম ধারাটির–

i. $s_n = 1$ যখন n বিজোড়

ii. $s_n = 0$ যখন n জোড়

iii. চতুর্থ আংশিক সমষ্টি 1

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii ⓚh i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖh i, ii ও iii

১১৫. $5 + 55 + 555 +$ .... ধারাটি–

i. অসীমতক সমষ্টি আছে

ii. $\frac{9s}{5} = 9 + 99 + 999 +$ .... লেখা যায়

iii. n তম পদের সমষ্টি $S = 5 + 55 + 555 +$ .... + n পদ পর্যন্ত

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓚh i ও iii ● ii ও iii ⓖh i, ii ও iii

১১৬. $\frac{1}{4^n}$ একটি ধারার সাধারণ পদ হলে (যেখানে $n \in I\!N$)–

i. ধারাটি অসীম

ii. ষষ্ঠ পদ 4096

iii. ধারাটি হবে $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} +$ ....

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) i ও ii ● i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১১৭. $\frac{2}{7}+\frac{2^2}{7}+\frac{2^3}{7}+\frac{2^4}{7}+$ .... **ধারাটি একটি গুণোত্তর অসীম ধারা–**

i. সাধারাণ অনুপাত 2

ii. অসীমতক সমষ্টি নেই

iii. প্রথম তিনটি পদের সমষ্টি 2

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

ব্যাখ্যা : সাধারণ অনুপাত $r=\frac{2^2}{7}\times\frac{7}{2}=2$

তিনটি পদের সমষ্টি $=\frac{2}{7}+\frac{4}{7}+\frac{8}{7}=\frac{14}{7}=2$

১১৮. $1+2+3+4+$ .... $+\ n$

i. ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $\frac{n(n+1)}{2}$

ii. ধারাটি অসীম হলে এর সমষ্টি নেই

iii. ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১১৯. $\frac{1}{(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}+$ .... অসীম ধারাটির–

i. ধারাটির 50 তম পদ $\frac{1}{(x+1)^{50}}$

ii. সাধারণ অনুপাত $r=\frac{1}{(x+1)^n}$

iii. অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r|<1$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii ● i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

উপরের তথ্যের আলোকে ১২০–১২২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

১২০. বিজোড় n–এর জন্য n তম আংশিক সমষ্টি কত? (সহজ)

● 1 (খ) 0 (গ) – 1 (ঘ) 2

১২১. জোড় n– জন্য n তম আংশিক সমষ্টি কত? (সহজ)

● 0 (খ) 1 (গ) – 1 (ঘ) – 2

১২২. প্রদত্ত ধারায় 9 তম পদ কোনটি? (মধ্যম)

(ক) 0 ● 1 (গ) – 1 (ঘ) 2

$\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+1)^3}+$ ....

উপরের তথ্যের আলোকে ১২৩ – ১২৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

১২৩. x = 1 হলে ধারাটি হবে – (সহজ)

(ক) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+$ .... (গ) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+$ ....

(গ) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+$ .... ● $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+$ ....

১২৪. x = 1 হলে ধারাটির সাধারণ অনুপাত নিচের কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $\frac{1}{2}$ ● $\frac{1}{3}$ (গ) $\frac{2}{3}$ (ঘ) $\frac{1}{6}$

১২৫. ধারাটির 10 তম পদের সমষ্টি নিচের কোনটি? (কঠিন)

(ক) $\frac{1}{59049}$ (খ) $\frac{1045}{59409}$ (গ) $\frac{29425}{59049}$ ● $\frac{29524}{59409}$

নিচের তথ্যের আলোকে ১২৬–১২৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$\frac{1}{(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^4}$ একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

১২৬. ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত? (সহজ)

(ক) $(x+1)$ (খ) $(x+1)^2$ ● $\frac{1}{(x+1)}$ (ঘ) $\frac{1}{(x+1)^2}$

১২৭. x এর কোন মানের জন্য ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নেই? (মধ্যম)

(ক) 1 ● – 1 (গ) – 2 (ঘ) – 3

১২৮. কোন শর্তে ধারাটির অসমীতক সমষ্টি বিদ্যমান থাকবে? (মধ্যম)

(ক) $x<-1$ অথবা $-1>x$ (খ) $x<-2$ অথবা $2<x$

(গ) $x<-2$ অথবা $1<x$ ● $x<-2$ অথবা $0<x$

পৌনঃপুনিক দশমিকের সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১২৯. $0.\dot{5}$ **সংখ্যাটির মূলদীয় ভগ্নাংশ কত?** (মধ্যম)

● $\frac{5}{9}$ (খ) $\frac{5}{10}$ (গ) $\frac{9}{5}$ (ঘ) $\frac{5}{8}$

১৩০. $0.\dot{2}\dot{7}$ **পৌনঃপুনিক দশমিকের মূলদীয় ভগ্নাংশ কত?** (মধ্যম)

(ক) $\frac{3}{10}$ ● $\frac{3}{11}$ (গ) $\frac{11}{3}$ (ঘ) $\frac{3}{8}$

১৩১. $2.\dot{3}\dot{7}$ **সংখ্যাটির মূলদীয় মান কত?** (মধ্যম)

(ক) $\frac{236}{99}$ (খ) $\frac{37}{99}$ ● $\frac{235}{99}$ (ঘ) $\frac{335}{99}$

১৩২. $1.\dot{3}0\dot{5}$ **পৌনঃপুনিক দশমিকের মূলদীয় ভগ্নাংশ কত?** (মধ্যম)

(ক) $\frac{305}{999}$ (খ) $\frac{1300}{999}$ (গ) $\frac{1301}{999}$ ● $\frac{1304}{999}$

১৩৩. $1{\cdot}\dot{2}3\dot{1}$ **এর মূলদীয় ভগ্নাংশ কত?** (মধ্যম)

● $\frac{410}{333}$ (খ) $\frac{410}{331}$ (গ) $\frac{420}{333}$ (ঘ) $\frac{410}{1231}$

১৩৪. $6{\cdot}\dot{4}0\dot{5}$ **এর মূলদীয় ভগ্নাংশ কত?** (মধ্যম)

(ক) $\frac{238}{38}$ ● $\frac{237}{37}$ (গ) $\frac{38}{238}$ (ঘ) $\frac{37}{237}$

১৩৫. $0{\cdot}\dot{4}$ **গুণোত্তর ধারা নিচের কোনটি?** (সহজ)

● 0.4 + 0.04 + 0.004 + ...

(খ) 0.4 + 0.44 + 0.444 + ...

(গ) 0.4 + 0.04 + 0.0004 + ...

(ঘ) 0.00.4 + 0.0004 + 0.00004 + ...

ব্যাখ্যা : 0.4 = 0.444 .... = 0.4 + 0.04 + 0.004 + ...

অর্থাৎ দশমিকের পর একটি পৌনঃপুনিক থাকলে সংখ্যার আগে একটি করে শূন্য বাড়াতে হবে।

১৩৬. $0{\cdot}\dot{1}\dot{4}$ **সংখ্যাটির গুণোত্তর ধারার অনুপাত কত?** (মধ্যম)

(ক) 0.1 ● 0.01 (গ) 0.001 (ঘ) 0.0001

ব্যাখ্যা : $0{\cdot}\dot{1}\dot{4}$ = .14 14 14 14 .... = .14 + .0014 + .000014 + ...

প্রথম পদ a = .14 সাধারণ অনুপাত $\frac{.0014}{.14}=0.01$

১৩৭. $0{\cdot}\dot{5}\dot{2}$ **গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ কোনটি?** (সহজ)

(ক) 52 ● 0.52 (গ) 0.052 (ঘ) 0.0052

১৩৮. 0.3 + 0.03 + 0.003 + ... ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{2}$ খ $-\frac{1}{3}$ ● $\frac{1}{3}$ ঘ $\frac{1}{9}$

ব্যাখ্যা : a = 0.3, r = 0.1

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি $= \frac{a}{1-r} = \frac{0.3}{1-0.1} = \frac{0.3}{0.9} + \frac{1}{3}$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১৩৯. i. $0\cdot\dot{1}2\dot{3}$ এর মূলদীয় ভগ্নাংশ $= \frac{41}{333}$

ii. $8\cdot\dot{5}\dot{1}$ এর মূলদীয় ভগ্নাংশ $= \frac{281}{31}$

iii. $0\cdot1\dot{3}$ এর মূলদীয় ভগ্নাংশ $= \frac{2}{15}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii ● i ও iii ঘ i, ii ও iii

১৪০. 0. 1, 0·01 একটি ধারা হলে–

i. প্রথম পদ 0·1

ii. সাধারণ অনুপাত 0·1

iii. ধারাটি হবে 0·1 + 0·01 + 0·001 + ...

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ ii ও iii গ i ও iii ● i, ii ও iii

১৪১. 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + ... ধারাটির–

i. অসীমতক সমষ্টি $\frac{10}{9}$

ii. সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{10}$

iii. অসীমতক সমষ্টি থাকবে না

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের তথ্যের আলোকে ১৪২–১৪৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

0.7 একটি পৌনঃপুনিক ভগ্নাংশ।

১৪২. প্রদত্ত পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশটি নিচের কোন অসীম গুণোত্তর ধারাটির সমান? (মধ্যম)

● 0.7 + 0.07 + 0.007 + 0.0007

খ 0.7 + 0.77 + 0.777 + 0.7777

গ 0.7 + 0.70 + 0.770 + 0.7770

ঘ 0.7 + 0.7 + 0.7 + 0.7

১৪৩. প্রাপ্ত অসীম ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত? (সহজ)

ক 0.01 ● 0.1

গ 0.07 ঘ 0.7

১৪৪. নিচের কোন সাধারণ ভগ্নাংশটি প্রদত্ত পৌনঃপুনিক ভগ্নাংশটির সমান? (মধ্যম)

ক $\frac{2}{9}$ খ $\frac{5}{9}$

● $\frac{7}{9}$ ঘ $\frac{9}{7}$

ব্যাখ্যা : $s_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{0.7}{1-\frac{1}{10}} = \frac{0.7\times10}{10-1} = \frac{7}{9}$

১৪৫. $1 + (-1)^n$ সাধারণ পদের অনুক্রম কী?

ক 1, 0, 1, 0.............. খ 2, 0, 2, 0...........

● 0, 2, 0, 2 ঘ 1, 2, 3, 4 ....

১৪৬. অসীম গুণোত্তর ধারার $|r| < 1$ হলে, $s_\infty =$ কত?

ক $\frac{1-r}{a}$ খ $\frac{2a}{1-r}$ গ $\frac{r^2-1}{r-1}$ ● $\frac{a}{1-r}$

১৪৭. $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}$ .... অনুক্রমটির r-তম পদ কত?

ক $\left\{\frac{2r-1}{r}\right\}$ ● $\left\{\frac{r}{2r-1}\right\}$ গ $\left\{\frac{1}{2r-1}\right\}$ ঘ $\left\{\frac{r}{r-1}\right\}$

১৪৮. 2 – 2 + 2 – 2 + ... + ধারাটির (n + 1) তম আংশিক সমষ্টি কোনটি? [যেখানে, n জোড় সংখ্যা]

● 2 খ 0 গ 1 ঘ –4

১৪৯. 1 – 1 + 1 – 1 + 1 .... ধারার ৫ম আংশিক সমষ্টি S_4 এর মান কত?

● 1 খ –1 গ 0 ঘ 2

১৫০. 6 – 6 + 6 – 6 + ... ধারাটির প্রথম 50টি পদের সমষ্টি কত?

ক 300 খ 6 ● 0 ঘ –6

১৫১. $1, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{9}$ ...... ধারাটি 10 তম পদ কোনটি?

ক $\frac{1}{3}10$ ● $\frac{1}{3}9$ গ $\frac{1}{3}11$ ঘ $\frac{1}{3}12$

১৫২. $2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{27}$ + ... ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?

ক $\frac{2}{3}$ খ 3 গ $\frac{1}{2}$ ● $\frac{3}{2}$

১৫৩. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$ + ... ধারাটির সমষ্টি কত?

● 2 খ $\frac{1}{6}$ গ $\frac{1}{2}$ ঘ $\frac{1}{20}$

১৫৪. কোন অনুক্রমের n তম পদ $\frac{1-(-1)^n}{2}$ হলে, এর 19 তম পদ কোনটি?

ক 0 ● 1 গ –1 ঘ 2

১৫৫. $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{9}$ + ... ধারাটির অষ্টম পদ কত?

ক $\frac{1}{27}$ খ $\frac{1}{27\sqrt{3}}$ ● $\frac{1}{81}$ ঘ $\frac{1}{81\sqrt{3}}$

১৫৬. $5\cdot5\dot{7}$ = কত?

ক $\frac{557}{90}$ খ $\frac{249}{45}$ ● $\frac{251}{45}$ ঘ $\frac{501}{90}$

১৫৭. $16 + 4 + 1 + \frac{1}{4}$ + ... গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?

ক $\frac{4}{3}$ খ $\frac{16}{3}$ গ $\frac{32}{3}$ ● $\frac{64}{3}$

১৫৮. 7 + 77 + 777 + ... ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?

ক 1 খ 10 গ $\frac{1}{100}$ ● সমষ্টি নেই

১৫৯. নিচের কোনটি অনুক্রম?

ক 3 + 1 – 1 – 3 – .... খ 3.1 + (–1)(–3) + ...

গ 1, 2, 3 .... ● $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$ +........

১৬০. কোন অনুক্রমের n তম পদ $U_n = \frac{a}{n}$ এবং $U_n < 10^{-4}$ হলে, n এর মান হবে–

i. $n < 10^3$
ii. $n < 10^4$
iii. $n > 10^4$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i খ ii ও iii ● iii ঘ i, ii ও iii

১৬১. 0, 1, 0, 1, 0, 1 .... অনুক্রমটির –
i. সাধারণ পদ $0 + (-1)^n$
ii. n বিজোড় হলে n তম পদ 0
iii. 20 তম পদ 1
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii ● ii ও iii গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

১৬২. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4}$ .... **ধারাটি –**
i. সমান্তর ধারা
ii. গুণোত্তর ধারা
iii. অসীমতক সমষ্টির বৈশিষ্ট্য
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii ● ii ও iii গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

১৬৩. $0.\dot{1}\dot{2}$ **কে অসীম গুণোত্তর ধারা প্রকাশ করলে ধারাটির–**
i. সাধারণ অনুপাত 0·01
ii. প্রথম 3টি পদের সমষ্টি 0.121212
iii. অসীমতক সমষ্টি $\frac{4}{33}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i খ i ও ii গ i ও iii ● i, ii ও iii

১৬৪. কোনো অনন্ত গুণোত্তর ধারার সাধারণ অনুপাত r হলে, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি–
i. $|r| \leq 1$ হয়
ii. $-1 < r < 1$ হয়
iii. $|r| > 1$ হয়
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ● ii গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১৭৪. অসীম গুণোত্তর ধারার ক্ষেত্রে–
i. প্রথম পদ 10 এবং দ্বিতীয় পদ 2 হলে সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{5}$
ii. $|r| < 1$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় করা যাবে
iii. অসীমতক সমষ্টি, $S = \frac{a}{1-r}$
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

১৭৫. i. $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{4}{5^3}$..........ধারাটির সাধারণ অনুপাত $\frac{2}{5}$
ii. গুণোত্তর ধারার n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, যখন $r < 1$
iii. গুণোত্তর ধারার অসীমতক সমষ্টি, $S_\alpha = \frac{a}{1-r}$, যখন $|r| < 1$
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

১৬৫. 3 + 6 + 12 + 24 + ...
i. এটি একটি গুণোত্তর ধারা
ii. এর সমষ্টি নেই
iii. এর আংশিক সমষ্টি আছে
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ ii ও iii ● i ও iii ঘ i, ii ও iii

1 + +0.1 + 0·01 + 0·001 + ...
উপরের তথ্যের আলোকে ১৬৬–১৬৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

১৬৬. ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত?
● $\frac{1}{10}$ খ $\frac{1}{100}$ গ 1 ঘ 10

১৬৭. ধারাটির 10 তম পদ কত?
ক $\frac{1}{10^{10}}$ ● $\frac{1}{10^9}$ গ $\frac{1}{10^8}$ ঘ 10^9

১৬৮. ধারাটির সমষ্টি কত?
ক $\frac{9}{10}$ খ $\frac{11}{10}$ ● $\frac{10}{9}$ ঘ $\frac{100}{9}$

নিচের তথ্যের আলোকে ১৬৯–১৭১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :
– 2 + 4 – 8 + 16+ .... একটি অসীম ধারা।

১৬৯. ধারাটির n তম পদ কত?
ক 2^n খ 2^{-n} ● $(-2)^n$ ঘ -2^n

১৭০. ধারাটির ৪র্থ আংশিক সমষ্টি কত?
ক – 8 ● 10 গ 16 ঘ –32

১৭১. ধারাটির সমষ্টি কত?
ক $\frac{1}{120}$ খ –120 গ $-\frac{2}{3}$ ● সমষ্টি নেই

নিচের ধারাটি লক্ষ করে ১৭২ ও ১৭৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :
$5 + \frac{5}{3} + \frac{5}{9}$ ....

১৭২. ধারাটির 10 তম পদ কোনটি?
● $\frac{5}{3^9}$ খ $\frac{5}{3^{10}}$ গ $\frac{5}{3^{10}}$ ঘ $\frac{5}{3^{12}}$

১৭৩. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?
ক 0 ● $\frac{15}{2}$ গ অসীম ঘ $\frac{5}{3}$

ক i ও ii ● ii ও iii গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

১৭৬. i. u_n কে u সাব n পড়া হয়
ii. সসীম ধারাকে সান্ত ধারা বলা হয়
iii. u_n কে u এর পাওয়ার n পড়া হয়
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
● i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১৭৭. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4}$ .... **ধারাটি –**
i. সমান্তর ধারা ii. গুণোত্তর ধারা
iii. অসীমতক সমষ্টির বৈশিষ্ট্য
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ক i ও ii ● ii ও iii গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের তথ্যের আলোকে ১৭৮ – ১৮০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$7 + 14 + x + ... + 91$ একটি ধারা।

১৭৮. x এর মান কোনটি? (মধ্যম)

ক 14 খ 20 ● 21 ঘ 28

১৭৯. ধারাটির কত তম পদ 91? (কঠিন)

ক 10 ● 13 গ 15 ঘ 20

১৮০. ধারাটির সমষ্টি কত? (মধ্যম)

ক 515 খ 630 ● 637 ঘ 701

নিচের তথ্য থেকে ১৮১ ও ১৮২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$Sn = a + ar^2 + ar^3 + ...$

১৮১. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত? (মধ্যম)

ক $\frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ খ $\frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ ● $\frac{a}{1 - r}$ ঘ $\frac{a}{1 + r}$

১৮২. অসীমতক সমষ্টি থাকার শর্ত কোনটি? (মধ্যম)

ক $r > 1$ ● $-1 < r < 1$ গ $r < 1$ ঘ $r \geq 1$

নিচের তথ্য থেকে ১৮৩ – ১৮৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$2 - 2 + 2 - 2 + ...$একটি অসীম ধারা।

১৮৩. n বিজোড় সংখ্যা হলে n-তম আংশিক সমষ্টি কত? (মধ্যম)

ক 4 খ –4 গ 0 ● 2

১৮৪. n জোড় সংখ্যা হলে n-তম আংশিক সমষ্টি কত? (মধ্যম)

ক 4 খ –4 ● 0 ঘ 2

ব্যাখ্যা : উদাহরণস্বরূপ $n = 4$ হলে সমষ্টি $2 - 2 + 2 = 0$.

১৮৫. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত? (মধ্যম)

ক 2 খ –2 গ 0 ● সমষ্টি নাই

নিচের তথ্য থেকে ১৮৬ ও ১৮৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{n^2 + 1}$

১৮৬. ধারাটির ৫ম ও ৬ষ্ঠ পদ কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{24}, \frac{1}{36}$ খ $\frac{1}{25}, \frac{1}{37}$ ● $\frac{1}{26}, \frac{1}{37}$ ঘ $\frac{1}{26}, \frac{1}{38}$

ব্যাখ্যা : ৫ম পদ = $\frac{1}{5^2 + 1} = \frac{1}{26}$ এবং ৬ষ্ঠ পদ = $\frac{1}{6^2 + 1} = \frac{1}{37}$

১৮৭. ধারাটির ১ম তিনটি পদের সমষ্টি কত? (কঠিন)

ক $\frac{3}{5}$ খ $\frac{2}{5}$ ● $\frac{4}{5}$ ঘ 1

ব্যাখ্যা : ১ম তিনটি পদের সমষ্টি = $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{5 + 2 + 1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১ ▸ $1 + \frac{1}{1 + y} + \frac{1}{(1 + y)^2} + \frac{1}{(1 + y)^3} + ...$

ক. উদাহরণসহ সমান্তর ধারার সংজ্ঞা দাও। ২

খ. $y = 2$ হলে, ধারাটির ১ম 10 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. y এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. **সমান্তর ধারা :** কোনো ধারার যেকোনো পদ ও তার পূর্ববর্তী পদের পার্থক্য সব সময় সমান হলে, সেই ধারাটিকে সমান্তর ধারা বলে।

উদাহরণ : $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ...$ একটি সমান্তর ধারা।

এখানে, ২য় পদ – ১ম পদ $= 3 - 1 = 2$, ৩য় পদ – ২য় পদ $= 5 - 3 = 2$, ৪র্থ পদ – ৩য় পদ $= 7 - 5 = 2$, ৫ম পদ – ৪র্থ পদ $= 9 - 7 = 2$

∴ ধারাটি সমান্তর।

খ. **প্রদত্ত ধারা :** $1 + \frac{1}{1 + y} + \frac{1}{(1 + y)^2} + \frac{1}{(1 + y)^3} + ...$

$y = 2$ হলে,

ধারাটি, $1 + \frac{1}{1 + 2} + \frac{1}{(1 + 2)^2} + \frac{1}{(1 + 2)^3} + ...$

$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ...$

ধারাটির ১ম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} < 1$

যেহেতু, ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r < 1$

∴ ধারাটির ১ম 10টি পদের সমষ্টি $= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{1\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{3}}$

$= \frac{1 - \frac{1}{59049}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{59049 - 1}{59049}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \times \frac{59048}{59049} = \frac{29524}{19683}$ **(Ans.)**

গ. ধারাটির ১ম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{y + 1}}{1} = \frac{1}{1 + y}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

বা, $-1 < r < 1$

বা, $-1 < \frac{1}{1 + y} < 1$

এখন $-1 < \frac{1}{1 + y}$

বা, $-1 > 1 + y$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $-1 - 1 > 1 + y - 1$ [উভয়পক্ষে (-1) যোগ করে]

বা, $-2 > y$

∴ $y < -2$

আবার, $\frac{1}{1 + y} < 1$

বা, $1 + y > 1$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $1 + y - 1 > 1 - 1$

∴ $y > 0$

নির্ণেয় শর্ত : $y > 0$ অথবা, $y < -2$

∴ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$

$= \frac{1}{1 - \frac{1}{y + 1}}$ ['ক' হতে পাই]

$= \frac{1}{\frac{y + 1 - 1}{y + 1}}$

$= \frac{y+1}{y}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২ ▸ $a = \frac{1}{4x+1} = r, 5{\cdot}\dot{2}\dot{3}$

ক. একটি অনুক্রম ও একটি অসীম ধারার উদাহরণ দাও। ২

খ. আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশটিকে অনন্ত গুণোত্তর ধারার মাধ্যমে মূলদীয় ভগ্নাংশে পকাশ কর। ৪

গ. অসীম গুণোত্তর ধারাটি গঠন কর। x এর উপর প্রযোজ্য শর্তসহ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. অনুক্রম : একটি অনুক্রমের সাধারণ পদ $= \frac{1}{n(n+1)}$ হলে, অনুক্রমটি

$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}$, ...

অসীম ধারা : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ ....

খ. আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশটি $5{\cdot}0\dot{2}\dot{3}$

$5{\cdot}0\dot{2}\dot{3} = 5{\cdot}023232323$ ....

$= 5 + (0{\cdot}023 + 0.00023 + 0{\cdot}0000023 + \ldots\ldots)$

এখানে $0{\cdot}023 + 0{\cdot}00023 + 0{\cdot}0000023 + \ldots\ldots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা যার ১ম পদ, $a = 0{\cdot}023$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{{\cdot}00023}{0{\cdot}023} = 0{\cdot}01 < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{0{\cdot}023}{1 - 0{\cdot}01}$

$= \frac{0{\cdot}023}{0{\cdot}99} = \frac{23}{990}$

$\therefore 5{\cdot}0\dot{2}\dot{3} = 5 + \frac{23}{990} = \frac{4973}{990}$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $a = \frac{1}{4x+1} = r$

$\therefore$ অসীম গুণোত্তর ধারাটি, $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots$

$\therefore \frac{1}{4x+1} + \frac{1}{(4x+1)^2} + \frac{1}{(4x+1)^3} + \frac{1}{(4x+1)^4} + \ldots\ldots$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকে, যদি ও কেবল যদি, $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ $\left|\frac{1}{4x+1}\right| < 1$ বা, $-1 < \frac{1}{4x+1} < 1$

এখন, $\frac{1}{4x+1} > -1$ অথবা, $\frac{1}{4x+1} < 1$

বা, $4x + 1 < -1$ বিপরীতকরণ করে] বা, $4x + 1 > 1$

বা, $4x < -2$ [উভয়পক্ষে (-1) যোগ করে] বা, $4x > 1 - 1$

[উভয়পক্ষে (-1) যোগ করে]

বা, $x < -\frac{2}{4}$ বা, $4x > 0$

$\therefore x < -\frac{1}{2}$ $\therefore x > 0$

নির্ণেয় শর্ত : $x > 0$ অথবা $x < -\frac{1}{2}$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $= \frac{a}{1-r}$

$= \frac{\frac{1}{4x+1}}{1 - \frac{1}{4x+1}} = \frac{\frac{1}{4x+1}}{\frac{4x+1-1}{4x+1}} = \frac{\frac{1}{4x+1}}{\frac{4x}{4x+1}}$

$= \frac{1}{4x+1} \times \frac{4x+1}{4x} = \frac{1}{4x}$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি $= \frac{1}{4x}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৩ ▸ একটি গুণোত্তর ধারার n তম পদ $U_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{(x+1)^n}; n \in IN$।

ক. ধারাটি নির্ণয় করে সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং তা নির্ণয় কর। ৪

গ. x = 1 এর জন্য উক্ত ধারার অসীমতক সমষ্টি থাকবে কিনা? থাকলে যুক্তিসহ তা নির্ণয় কর। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, সাধারণ পদ $u_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{(x+1)^n}; n \in IN$

$\therefore$ যখন $n = 1$ তখন $u_1 = -\frac{1}{x+1}$

$\therefore$ " $n = 2$ তখন $u_2 = -\frac{1}{(x+1)^2}$

$\therefore$ " $n = 3$ তখন $u_3 = \frac{1}{(x+1)^3}$

$\therefore$ ধারাটি হবে, $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} - \ldots\ldots$

$\therefore$ সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-1}{(x+1)^2} \div \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{x+1}$ **(Ans.)**

খ. 'ক' হতে পাই, $r = -\frac{1}{x+1}$

প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে,

যদি $|r| < 1$

অর্থাৎ $\left|\frac{-1}{x+1}\right| < 1$

বা, $\left|\frac{1}{x+1}\right| < 1$

বা, $|x+1| > 1$ [$|x+1|$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\pm(x+1) > 1$

হয়, $(x+1) > 1$

বা, $x > 0$ অথবা, $-(x+1) > 1$

$x + 1 < -1$

$x < -2$

নির্ণেয় শর্ত : $x > 0$ অথবা, $x < -2$

গ. $x = 1$ হলে উক্ত ধারাটি হবে,

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \ldots\ldots$

এখানে, সাধারণ অনুপাত, $r = -\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

যেহেতু $|r| < 1$

$\therefore x = 1$ এর জন্য ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে।

ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{2}$

সাধারণ অনুপাত, $r = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right\}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৪ ▸ $\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$ **একটি অনুক্রমের সাধারণ পদ।**

ক. অনুক্রমটি তৈরি কর। ২

খ. অনুক্রমটির 20 তম পদ এবং ১ম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. n এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে অনুক্রমটির যোগফল শূন্য হবে? ৪

▸◂ ৪নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ এর জন্য অনুক্রমটি হলো

$\cos\frac{\pi}{2}, \cos\pi \cos\frac{3\pi}{2}, \cos 2\pi \ldots\ldots$ **(Ans.)**

খ. অনুক্রমটির 20 তম পদ $= \cos\left(\frac{20\pi}{2}\right)$

$= \cos\left(20\frac{\pi}{2} + 0\right)$

$= -\cos 0^\circ$

$= -1$ **(Ans.)**

এখন, অনুক্রমের ১ম দশটি পদ হলো :

$0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1 \ldots\ldots$

$\therefore$ ১ম 10 টি পদের সমষ্টি $= -1$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, অনুক্রমের সাধারণ পদ $\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$

$n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ এর জন্য অনুক্রমটির মান পাই,

$\cos\left(\frac{1\cdot\pi}{2}\right) = 0$

$\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{2}\right) = -1$

$\cos\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right) = 0$

$\cos\left(\frac{4\cdot\pi}{2}\right) = 1$

$\cos\left(\frac{5\cdot\pi}{2}\right) = 0$

....

....

$\therefore$ অনুক্রমটি হবে :

$0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots\ldots$

এখানে, প্রাপ্ত অনুক্রমটি হতে দেখা যাচ্ছে, প্রথম 4টি পদের যোগফল = 0

প্রথম 8টি পদের যোগফল = 0

প্রথম 12 টি পদের যোগফল = 0

সুতরাং n এর মান 4 এর গুণিতক যেকোনো সংখ্যার জন্য অনুক্রমের যোগফল শূন্য হবে। **(Ans.)**

প্রশ্ন–৫ ▸ একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ 2 এবং সাধারণ অনুপাত $\left(-\frac{1}{3}\right)$

ক. অসীম ধারা কী? ২

খ. ধারাটির 10 তম পদ ও প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি যদি থাকে, তবে তা নির্ণয় কর। ৪

▸◂ ৫নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. বাস্তব সংখ্যার একটি অনুক্রম $u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots, u_a, \ldots$ হলে $u_1, u_2, u_3 + \ldots\ldots + u_a + \ldots$ কে বাস্তব সংখ্যার একটি অসীম ধারা বলা হয়। এই ধারাটি n তম পদ u_n।

খ. দেওয়া আছে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = 2$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = -\frac{1}{3}$

$\therefore$ ধারাটি $= ar^\circ + ar^1 + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots$

$= 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} - \frac{2}{3^3} + \ldots\ldots$

ধারাটি 10 তম পদ $= ar^{10-1}$

$= ar^9$

$= 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^9 = -\frac{2}{3^9}$

এখন ধারাটির ১ম 10টি পদের সমষ্টি ;

$S_{10} = \frac{a(1-r^{10})}{1-r}$; $r < 1$

$= 2 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{10}}{1 - (-\frac{1}{3})}$

$= 2 \times \frac{1 - \frac{1}{3^{10}}}{1 + \frac{1}{3}}$

$= 2 \times \frac{\frac{3^{10}-1}{3^{10}}}{\frac{4}{3}} = 2 \times \frac{3^{10}-1}{4 \times \frac{3^{10}}{3}}$

$= \frac{3^{10}-1}{2 \times 3^9} = \frac{59048}{39366} = 1.5$ (আসন্ন) **(Ans.)**

গ. এখানে, গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = 2$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = -\frac{1}{3}$

যেহেতু $r = -\frac{1}{3} < 1$, সেহেতু ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-(-3)}$

$= \frac{2}{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{3+1}{3}} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$

∴ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $\frac{3}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৬ ▸ একটি অসীম গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ 1 এবং সাধারণ অনুপাত $-\frac{2}{7}$ ।

ক. ধারাটি নির্ণয় কর। ২

খ. ধারাটির দশম পদ নির্ণয় করে প্রথম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, ধারাটির ১ম পদ 1 এবং সাধারণ অনুপাত, $-\frac{2}{7}$

∴ ধারাটির ২য় পদ = $1 \times \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{2}{7}$

৩য় পদ = $-\frac{2}{7} \times \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{2^2}{7^2}$

৪র্থ পদ = $\frac{2^2}{7^2} \times \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{2^3}{7^3}$

নির্ণেয় গুণোত্তর ধারা, $1 - \frac{2}{7} + \frac{2^2}{7^2} - \frac{2^3}{7^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

খ. ধারাটির দশম পদ = $ar^{10-1} = 1 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^9 = -\frac{2^9}{7^9}$

এখন ধারাটির ১ম 10টি পদের সমষ্টি, S_{10}

$= a\frac{1-r^{10}}{1-r}; r < 1$

$= 1 \times \frac{1-\left(\frac{-2}{7}\right)^{10}}{1-\left(-\frac{2}{7}\right)} = \frac{1-\frac{2^{10}}{7^{10}}}{1+\frac{2}{7}}$

$= \frac{\frac{7^{10}-2^{10}}{7^{10}}}{\frac{7+2}{7}} = \frac{7^{10}-2^{10}}{7^{10}} \times \frac{7}{9}$

$= 0.7778$ (আসন্ন) **(Ans.)**

গ. গুণোত্তর ধারার অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\left(\frac{-2}{7}\right)} = \frac{1}{1+\frac{2}{7}}$

$= \frac{1}{\frac{7+2}{7}} = \frac{7}{9}$

∴ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $\frac{7}{9}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৭ ▸ $(1+y)^{-1} + (1+y)^{-2} + (1+y)^{-3} + \ldots\ldots$ একটি অনন্ত ধারা

ক. ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. $y = -\frac{1}{3}$ হলে ধারাটি নির্ণয় কর। ধারাটির 10 তম পদ এবং প্রথম 12টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. y এর উপরে কোন শর্তসাপেক্ষে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত ধারাটির (যেকোনো পদ ÷ পূর্ববর্তী পদ)

$= (1+y)^{-2} \div (1+y)^{-1} = \frac{1}{1+y}$

অথবা, $(1+y)^{-3} \div (1+y)^{-2} = \frac{1}{1+y}$

প্রদত্ত ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা। এর সাধারণ অনুপাত $= \frac{1}{1+y}$ **(Ans.)**

খ. অসীম ধারাটি $(1+y)^{-1} + (1+y)^{-2} + (1+y)^{-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \frac{1}{(1+y)} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+y)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$y = -\frac{1}{3}$ হলে,

ধারাটি $= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \frac{3}{3-1} + \frac{9}{(3-1)^2} + \frac{27}{(3-1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

যার ১ম পদ, $a = \frac{3}{2}$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{3}{2}$

∴ ধারাটির দশম পদ = $ar^{10-1} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{10-1} = \frac{59049}{1024}$ **(Ans.)**

এবং প্রথম 12টি পদের সমষ্টি = $\frac{a(r^{12}-1)}{r-1}$ [∵ r > 1]

$= \frac{\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{12} - 1\right\}}{\frac{3}{2} - 1}$

$= \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{531441}{4096} - 1\right)}{\frac{1}{2}}$

$= 3\left(\frac{531441}{4096} - 1\right)$

$= 3\left(\frac{531441 - 4096}{4096}\right)$

$= 3\,\frac{527345}{4096}$

$= \frac{1582035}{4096}$ **(Ans.)**

গ. 'ক' হতে প্রাপ্ত,

ধারাটির সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{y+1}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়,

অর্থাৎ $\left|\frac{1}{y+1}\right| < 1$

বা, $\frac{1}{|y+1|} < 1$

বা, $|y+1| > 1$

এখন, $|(y+1)|$ অঋণাত্মক হলে, $y + 1 > 1$ বা, $y > 0$

আবার $|(y+1)|$ ঋণাত্মক হলে, $-(y+1) > 1$

বা, $y + 1 < -1$

বা, $y < -2$

নির্ণেয় শর্ত হলো $y < -2$ অথবা $y > 0$ **(Ans.)**

অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{\frac{1}{y+1}}{1-\frac{1}{y+1}} = \frac{\frac{1}{y+1}}{\frac{y+1-1}{y+1}}$$

$$= \frac{1}{y+1} \times \frac{y+1}{y}$$

$$= \frac{1}{y} \textbf{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন–৮ ▸ $2 + 4 + 8 + 16 + ...$ একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

ক. ধারাটির সাধারণ অনুপাত এবং তৃতীয় আংশিক সমষ্টি কত? ২

খ. প্রদত্ত ধারাটির 20 তম পদ এবং প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. $x = -\frac{1}{2}$ হলে প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $\frac{1}{x+1}$ হয়, এক্ষেত্রে ধারাটির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ লিখে অনন্ত ধারাটি গঠন কর। x–এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে? ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, ধারাটি $2 + 4 + 8 + 16 +$ ---------- অসীম গুণোত্তর

$\therefore$ ধারাটির অনুপাত $r = \frac{\text{দ্বিতীয় পদ}}{\text{প্রথম পদ}} = \frac{4}{2} = 2$ **(Ans.)**

এখন, ধারাটির তৃতীয় আংশিক সমষ্টি অর্থাৎ 3 তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় করতে হবে।

প্রদত্ত ধারাটির তৃতীয় আংশিক সমষ্টি $= 2 + 4 + 8 = 14$ **(Ans.)**

খ. ধারাটির ১ম পদ, $a = 2$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = 2$

$\therefore$ ধারাটির 20তম পদ $= ar^{20-1} = 2.2^{20-1}$

$=1048576$ **(Ans.)**

এবং ১ম দশটি পদের সমষ্টি $= \frac{a(r^{10}-1)}{r-1}$ $[\because r > 1]$

$$= \frac{2(2^{10}-1)}{2-1}$$

$= 2^{11} - 2 = 2046$ **(Ans.)**

গ. ধারাটির n তম পদ $= ar^{n-1} = 2.2^{n-1} = 2^n$

$x = -\frac{1}{2}$ হলে প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $\frac{1}{1+x}$ হয়।

অর্থাৎ $2 = \frac{1}{1+x}$

$\therefore x = -\frac{1}{2}$ হলে ধারাটি হবে,

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^3} + ...$$

এক্ষেত্রে ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা এবং এর সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{1+x}$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{x+1}$

এখন প্রদত্ত ধারার অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ $-1 < r < 1$ হয়,

বা, $-1 < \frac{1}{x+1} < 1$ হয়, $[r = \frac{1}{x+1}$ বসিয়ে]

এখন $-1 < \frac{1}{x+1}$

বা, $\frac{1}{-1} > x + 1$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $-1 > x + 1$

বা, $-1 - 1 > x + 1 - 1$ [উভয়পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে]

বা, $-2 > x$

$\therefore x < -2$

অথবা $\frac{1}{x+1} < 1$

বা, $x + 1 > 1$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $x + 1 - 1 > 1 - 1$ [উভয়পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে]

$\therefore x > 0$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $x < -2$ অথবা $x > 0$ হয়। **(Ans.)**

প্রশ্ন–৯ ▸ $1 + 2 + 4 + 8 +$ ....

ক. দেখাও যে, প্রদত্ত ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা। ২

খ. $r = 8$ হলে, ধারাটির r তম পদের মান কত? ৪

গ. এর n তম আংশিক সমষ্টি কত? অসীমতক সমষ্টি (যদি থাকে) নির্ণয় কর। ৪

৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত ধারা $1 + 2 + 4 + 8 +$ ....

ধারাটির (যেকোনো পদ $\div$ পূর্ববর্তী পদ) $= 2 \div 1 = 2$

অথবা $4 \div 2 = 2$

অথবা $8 \div 4 = 2$

সুতরাং, প্রদত্ত ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা। **(দেখানো হলো)**

খ. প্রদত্ত ধারা $= 1 + 2 + 4 + 8 +$ ....

এখানে, প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $q = 2$

$\therefore$ ধারাটির r তম পদ $= aq^{r-1} = 1.2^{r-1} = 2^{r-1}$

$= 2^{8-1}$ $[\because r = 8]$

$= 2^7 = 128$ **(Ans.)**

গ. ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $q = 2$

এখানে, $q > 1$

$\therefore$ ধারাটির n তম আংশিক সমষ্টি $= \frac{a(q^n - 1)}{q-1}$

$$= \frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1} = 2^n - 1$$

আমরা জানি, কোনো অনন্ত গুণোত্তর ধারার সাধারণ অনুপাত 1 অপেক্ষা বড় হলে, অসীমতক সমষ্টি থাকে না।

যেহেতু ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $q > 1$

সুতরাং অসীমতক সমষ্টি নেই। **(Ans.)**

প্রশ্ন–১০ ▸ $0\cdot0\dot{2}\dot{4}$ এবং $4\cdot0\dot{2}\dot{4}$ দুইটি পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশ।

?
ক. প্রথম পৌনঃপুনিক ভগ্নাংশের ধারা নির্ণয় কর। ২
খ. 'ক'–এ প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত বের কর। ৪
গ. দ্বিতীয় পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $0{\cdot}0\dot{2}\dot{4} = 0{\cdot}0242424$ ....

$= 0{\cdot}024 + 0{\cdot}00024 + 0{\cdot}0000024 + ...$

খ. 'ক' এ প্রাপ্ত ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

যার, প্রথম পদ, $u_1 = 0{\cdot}024$

এবং দ্বিতীয় পদ, $u_2 = 0{\cdot}00024$

$\therefore$ সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{0{\cdot}00024}{0{\cdot}024} = 0{\cdot}01$ **(Ans.)**

গ. দ্বিতীয় পৌনঃপুনিক ভগ্নাংশটি হলো :

$4{\cdot}0\dot{2}\dot{4} = 4{\cdot}0242424$ ....

$= 4 + (0.024 + 0.00024 + 0.0000024 + ...)$

বন্ধনীর ভেতরের ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ, $a = 0.024$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{0.00024}{0.024} = 0.01$ $[\because r < 1]$

সুতরাং, $4{\cdot}0\dot{2}\dot{4} = 4 + \frac{a}{1-r}$

$= 4 + \frac{0.024}{1-0.01} = 4 + \frac{0.024}{0.99}$

$= 4 + \frac{24}{990} = 4 + \frac{8}{330}$

$= \frac{1328}{330} = \frac{664}{165}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১১ ▸ $\frac{1}{3x-1} - \frac{2}{(3x-1)^2} + \frac{4}{(3x-1)^3} - \frac{8}{(3x-1)^4} +$ ....অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

?
ক. ধারাটির $(p + 1)$ তম পদ বের কর। ২
খ. $x = 1$ হলে ধারাটির প্রথম 5 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪
গ. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকার জন্য x এর উপর আরোপিত শর্ত নির্ণয় কর। ৪

১১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{3x-1}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-2}{(3x-1)^2} \div \frac{1}{3x-1}$

$= \frac{-2}{3x-1}$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার p তম পদ ar^{p-1}

$\therefore (p + 1)$ তম পদ $= ar^{p+1-1} = ar^p$

$= \left(\frac{1}{3x-1}\right) . \left(\frac{-2}{3x-1}\right)^p$

$= (-2)^p \times \left(\frac{1}{3x-1}\right)\left(\frac{1}{3x-1}\right)^p$

$= (-2)^p\left(\frac{1}{3x-1}\right)^{p+1}$ **(Ans.)**

খ. $x = 1$ হলে প্রদত্ত ধারাটি,

$\frac{1}{3.1-1} - \frac{2}{(3.1-1)^2} + \frac{4}{(3.1-1)^3} - \frac{8}{(3.1-1)^4} +$ ....

$= \frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{4}{2^3} - \frac{8}{24} +$ ....

এখানে, ধারাটির প্রথম পদ $a = \frac{1}{2}$

এবং সাধারণ অনুপাত $r = -\frac{2}{2^2} - \frac{1}{2}$

$= -1 < 1$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 5 টি পদের সমষ্টি

$= \frac{a(1-r^5)}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}\{1-(1-1)^5\}}{1-(-1)}$

$= \frac{\frac{1}{2}(1+1)}{2} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

গ. প্রদত্ত ধারা, $\frac{1}{3x-1} - \frac{2}{(3x-1)^2} + \frac{4}{(3x-1)^3} - \frac{8}{(3x-1)^4} +$ ....

ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{3x-1}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-2}{(3x-1)^2} \div \frac{1}{3x-1} = \frac{-2}{3x-1}$

ধারাটির অসীমতকে সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়

অর্থাৎ $-1 < r < 1$

বা, $-1 < \frac{2}{3x-1} < 1$

এখন, $-1 < \frac{2}{3x-1}$ হলে

বা, $1 > \frac{2}{3x-1}$ [–1 দ্বারা গুণ করে]

বা, $3x - 1 > 2$

বা, $x > \frac{2+1}{3}$

বা, $x > 1$

আবার, $\frac{-2}{3x-1} < 1$

বা, $\frac{2}{3x-1} > -1$ [–1 দ্বারা গুণ করে]

বা, $2 > -3x + 1$

বা, $1 > -3x$

বা $x < \frac{-1}{3}$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $x > 1$ অথবা $x < \frac{-1}{3}$ হয়।

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3x-1}}{1-\frac{-2}{3x-1}}$

$= \frac{\frac{1}{3x-1}}{\frac{3x-1+2}{3x-1}} = \frac{1}{3x+1}$

$x > 1$ বা $x < \frac{-1}{3}$ এবং সমষ্টি $\frac{1}{3x+1}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১২ ▸ $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

ক. ধারাটির ষষ্ঠ পদ নির্ণয় কর। ২

খ. ধারাটির ৪টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে তবে নির্ণয় কর। ৪

১২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত ধারাটি, $S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

ধারাটির ১ম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n-তম পদ = ar^{n-1}

$\therefore$ ধারাটির ষষ্ঠ পদ = $1 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{6-1} = 1 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ **(Ans.)**

খ. আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n পদের সমষ্টি = $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $[\because |r| < 1]$

$\therefore$ ধারাটির ৪টি পদের সমষ্টি = $\frac{1\left\{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8\right\}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$$= \frac{1 - \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^4}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2^4}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\frac{16-1}{16}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\frac{15}{16}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{15\sqrt{2}}{16(\sqrt{2}-1)}$$

$$= \frac{15\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{16(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{15\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{16 \times (2-1)}$$

$$= \frac{30 + 15\sqrt{2}}{16 \times 1}$$

$$= \frac{30 + 15\sqrt{2}}{16} \textbf{ (Ans.)}$$

গ. এখানে, $|r| < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে।

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{2-1}$$

$$= 2 + \sqrt{2}$$

অসীমতক সমষ্টি $2 + \sqrt{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৩ ▸ $\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ **একটি ধারা।**

ক. $x = \frac{1}{2}$ হলে, ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. 'ক' হতে প্রাপ্ত ধারাটির পঞ্চম পদ এবং প্রথম পাঁচটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই শর্তে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত ধারা $S = \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$x = \frac{1}{2}$ হলে,

ধারাটি, $S = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2} + 1} + \frac{1}{\left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right)^2} + \frac{1}{\left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$= \frac{1}{1+1} + \frac{1}{(1+1)^2} + \frac{1}{(1+1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{ (Ans.)}$$

ধারাটির সাধারণ অনুপাত = $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ. 'ক' অংশ হতে প্রাপ্ত ধারা,

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

এখানে, ধারাটির ১ম পদ $a = \frac{1}{2}$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{2} < 1$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ = ar^{n-1}

$\therefore$ ধারাটির পঞ্চম পদ = $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{32} \textbf{ (Ans.)}$$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম পাঁচটি পদের সমষ্টি

$$S_5 = \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1 - \frac{1}{2}} \quad [\because |r| < 1]$$

$= \dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{32}$

$= \dfrac{32-1}{32} = \dfrac{31}{32}$ **(Ans.)**

গ. প্রদত্ত ধারাটির ১ম পদ, $a = \dfrac{1}{2x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{1}{(2x+1)^2} \div \dfrac{1}{2x+1} = \dfrac{1}{2x+1}$

প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$

অর্থাৎ, $\left|\dfrac{1}{2x+1}\right| < 1$ বা, $-1 < \dfrac{1}{2x+1} < 1$ হয়

এখন, $-1 < \dfrac{1}{2x+1}$

বা, $\dfrac{1}{-1} > 2x+1$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $-1-1 > 2x+1-1$ [উভয়পক্ষে (-1) যোগ করে]

বা, $-2 > 2x$

বা, $-1 > x$ [উভয়পক্ষে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore x < -1$

আবার, $\dfrac{1}{2x+1} < 1$

বা, $2x+1 > 1$

বা, $2x+1-1 > 1-1$

বা, $2x > 0$

$\therefore x > 0$

নির্ণেয় শর্ত : $x < -1$ অথবা $x > 0$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$

$= \dfrac{\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}} = \dfrac{\frac{1}{2x+1}}{\frac{2x+1-1}{2x+1}}$

$= \dfrac{\frac{1}{2x+1}}{\frac{2x}{2x+1}} = \dfrac{1}{2x+1} \times \dfrac{2x+1}{2x}$

$= \dfrac{1}{2x}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৪ ▸ 4 + 8 + 16 + 32 +...............একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

ক. ধারাটির সাধারণ অনুপাত এবং চতুর্থ আংশিক সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. ধারাটির 7 তম পদ, 10 তম পদ এবং r তম পদ নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি (যদি থাকে) নির্ণয় কর। ধারাটির প্রথম 20টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

ধারাটি 4 + 8 + 16 + 32 + ... অসীম গুণোত্তর ।

$\therefore$ ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{\text{দ্বিতীয় পদ}}{\text{প্রথম পদ}} = \dfrac{8}{4} = 2$ **(Ans.)**

$\therefore$ চতুর্থ আংশিক সমষ্টি $= 4 + 8 + 16 + 32 = 60$ **Ans.**

খ. আমরা জানি,

গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

'ক' হতে পাই,

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 4$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = 2$

$\therefore$ ধারাটির 7 তম পদ $= 4 \times 2^{7-1}$ $[\because n = 7]$

$= 4 \times 2^6 = 4 \times 64$

$= 256$ **(Ans)**

$\therefore$ ধারাটির 10 তম পদ $= 4 \times 2^{10-1}$ $[\because n = 10]$

$= 4 \times 2^9 = 4 \times 512$

$= 2048$ **(Ans.)**

এবং ধারাটির r তম পদ $4 \times 2^{r-1}$ $[\because n = r]$

$= 4 \times \dfrac{2^r}{2} = 2.2^r$

$= 2^{r+1}$ **(Ans.)**

গ. আমরা জানি, যেকোনো অসীম গুণোত্তর ধারার শুধুমাত্র $|r| < 1$ শর্তে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে।

কিন্তু 'ক' হতে পাই,

ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = 2$

বা, $|r| = |2| = 2 > 1$

$\therefore$ ধারাটির কোনো অসীমতক সমষ্টি থাকবে না **(Ans.)**

আমরা জানি,

ধারাটির n তম পদের সমষ্টি, $S_n = a\dfrac{r^n-1}{r-1}$ $1 \because r > 1$

$\because$ ধারাটির 20টি পদের সমষ্টি $S_{20} = 4 \times \dfrac{2^{20}-1}{2-1}$

$= 4(2^{20}-1)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৫ ▸ একটি গুণোত্তর ধারার n তম পদ, $U_n = \dfrac{1}{(3x)^n}$

ক. ধারাটি নির্ণয় করে সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. $x = 1$ এবং $x = \dfrac{1}{4}$ এর ক্ষেত্রে অসীমতক সমষ্টি থাকবে কি না এবং থাকলে তা নির্ণয় কর। ৪

১৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $U_n = \dfrac{1}{(3x)^n}$

$n = 1$ হলে, ধারাটির ১ম পদ $= \dfrac{1}{3x}$

$n = 2$ হলে, ধারাটির ২য় পদ $= \dfrac{1}{(3x)^2}$

$n = 3$ হলে, ধারাটির ৩য় পদ $= \dfrac{1}{(3x)^n}$

$\therefore$ ধারাটি হলো $\dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{(3x)^2} + \dfrac{1}{(3x)^n} + ...$ **(Ans.)**

$\therefore$ ধারাটির সাধারণ অনুপাত, r = ২য় পদ ÷ ১ম পদ

$= \dfrac{1}{(3x)^2} \div \dfrac{1}{3x} = \dfrac{1}{(3x)^2} \times 3x$

$= \frac{1}{3x}$ **(Ans.)**

খ. কোনো ধারার অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি সাধারণ অনুপাত $|r| < 1$ হয়।

এখানে, $r = \frac{1}{3x}$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি থাকার শর্ত $|\frac{1}{3x}| < 1$

$\frac{1}{3x}$ ধনাত্মক হলে $\frac{1}{3x} < 1$

বা, $3x > 1$

$\therefore x > \frac{1}{3}$

আবার, $\frac{1}{3x}$ ঋণাত্মক হলে, $-\frac{1}{3x} < 1$

বা, $\frac{1}{3x} > -1$ [(-1) দ্বারা গুণ করে]

বা, $3x < -1$ [ব্যস্তকরণ করে]

$\therefore x < -\frac{1}{3}$

নির্ণেয় শর্ত : $x < -\frac{1}{3}$ অথবা $x > \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3x}\right)}{1-\left(\frac{1}{3x}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{3x}\right)}{\frac{3x-1}{3x}}$$

$= \frac{1}{3x-1}$ **(Ans.)**

গ. $x = 1$এর জন্য ধারাটি হলো,

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x = 1$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে কারণ $|r| < 1$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{1}{3.1-1} = \frac{1}{2}$ [‘খ’ থেকে]

আবার, $x = \frac{1}{4}$ হলে অসীমতক সমষ্টি থাকবে না

কারণ $-\frac{1}{3} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৬ ▸ কোন গুণোত্তর ধারায় প্রথম পদ $\frac{2}{3}$ এবং অসীমতক সমষ্টি $\frac{1}{2}$

ক. সাধারণ অণুপাত r ধরে সমীকরণ গঠন কর। ২

খ. ধারাটি নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির n তম আংশিক সমষ্টি $\frac{40}{81}$ হলে n এর মান নির্ণয় কর। ৪

▸◂ ১৬নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. এখানে,

প্রথম পদ, $a = \frac{2}{3}$

সাধারণ অনুপাত = r

অসীমতক সমষ্টি = $\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a}{1-r} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ. ‘ক’ থেকে প্রাপ্ত, $\frac{\frac{2}{3}}{1-r} = \frac{1}{2}$

বা, $1 - r = \frac{2}{3} . 2$

বা, $r = 1 - \frac{4}{3}$

$\therefore r = -\frac{1}{3}$

ধারার ২য় পদ = $\frac{2}{3} \times (-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{9}$

৩য় পদ = $(-\frac{2}{9}) \times (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{27}$

৪র্থ পদ = $\frac{2}{27} \times (-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{81}$

নির্ণেয় গুণোত্তর ধারা, $\frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - \frac{2}{81} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

গ. ধারাটির n তম আংশিক সমষ্টি = $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ [$\because r < 1$]

বা, $\frac{40}{81} = \frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$

বা, $\frac{40}{81} = \frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{\frac{4}{3}}$

বা, $\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\} = \frac{40}{81} \times \frac{4}{3}$

বা, $1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{40}{81} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2}$

বা, $1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{80}{81}$

বা, $\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \frac{80}{81}$

বা, $\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{81}$

বা, $\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^4$

$\therefore n = 4$

নির্ণেয় n এর মান 4 **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৭ ▸ 3 + 33 + 333 + ... একটি অসীম ধারা।

ক. প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n হলে $3S_n$ = কত? ২

খ. S_n এর মান নির্ণয় করে দেখাও যে, $S_n = \frac{10}{27}(10^n - 1) - \frac{n}{3}$ ৪

গ. ধারাটির প্রথম 5 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর, প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে কি? ব্যাখ্যা কর। ৪

▸◂ ১৭নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $\therefore S_n = 3 + 33 + 333 + \ldots\ldots\ldots$ n সংখ্যক পদ পর্যন্ত

উপরিউক্ত ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n

$S_n = \frac{3}{9}\left\{10.\frac{10^n-1}{10} - n\right\}$

$\therefore 3S_n = 9 + 99 + 999 + \ldots\ldots + n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

খ. $S_n = 3 + 33 + 333 + \ldots\ldots\ n$ তম পদ

$= \frac{3}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots\ldots + n$ তম পদ

$= \frac{3}{9}\{(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \ldots\ldots n$ তম পদ $- n\}$

$= \frac{3}{9}\{(10 + 10^2 + 10^2 + \ldots\ldots + n$ তম পদ$) - n\}$

$= \frac{1}{3}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1} - n\right\}$

$= \frac{10(10^n-1)}{27} - \frac{n}{3}$

$\therefore S_n = \frac{10(10^n-1)}{27} - \frac{n}{3}$ **(দেখানো হলো)**

গ. 'খ' হতে পাই,

n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{10}{27}(10^n - 1) - \frac{n}{3}$

ধারাটি প্রথম 5 পদের সমষ্টি, $S_5 = \frac{10}{27}(10^5 - 1) - \frac{5}{3}$

$= \frac{10}{27}(99999) - \frac{5}{3}$

$= 37035$ **(Ans.)**

যেহেতু $3 + 33 + 333 + \ldots\ldots$

$= \frac{1}{3}(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots\ldots) - (1 + 1 + \ldots\ldots)$

এখন, $(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots\ldots$

ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = 10$

যেহেতু $|r| = 10 > 1$

কাজেই ধারাটির কোনো অসীমতক সমষ্টি নেই। **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৮ ▸ নিচের ধারাটি লক্ষ কর :

$$\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{(3x-1)^2} + \frac{1}{(3x-1)^3} + \ldots\ldots$$

ক. x = 2 হলে, ধারাটি নির্ণয় কর এবং প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত? ২

খ. x = 1 হলে, ধারাটির 12 তম পদ এবং প্রথম 12টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

▸◂ ১৮নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. প্রদত্ত ধারাটি, $\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{(3x-1)^2} + \frac{1}{(3x-1)^3} + \ldots\ldots$

x = 2 হলে ধারাটি,

$\frac{1}{3.2-1} + \frac{1}{(3.2-1)^2} + \frac{1}{(3.2-1)^3} + \ldots\ldots$

$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots\ldots$ **(Ans.)**

ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{5^2}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5^2} \times \frac{5}{1} = \frac{1}{5}$ **(Ans.)**

খ. x = 1 হলে ধারাটি,

$\frac{1}{3.1-1} + \frac{1}{(3.1-1)^2} + \frac{1}{(3\cdot1-1)^3} + \ldots\ldots$

ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{2}$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{2^2} \div \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ ধারাটির 12 তম পদ $= ar^{12-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12-1}$

$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2048}$

$= \frac{1}{4096}$ **(Ans.)**

$\therefore$ ধারাটির 12 পদের সমষ্টি $= \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right\}}{1 - \frac{1}{2}}$

$= \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4096}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{4095}{4096}$ **(Ans.)**

গ. প্রদত্ত রাশি,

$\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{(3x-1)^2} + \frac{1}{(3x-1)^3} + \ldots\ldots$

ধারাটির প্রথম পদ $a = \frac{1}{3x-1}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(3x-1)^2} \div \frac{1}{3x-1} = \frac{1}{(3x-1)^2} \times \frac{3x-1}{1}$

$\therefore r = \frac{1}{3x-1}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

$\therefore \frac{1}{3x-1} < 1$ অথবা, $\frac{1}{3x-1} > 1$

বা, $3x - 1 > 1$ বা, $3x - 1 < 1$

বা, $3x - 1 + 1 > 1 + 1$ বা, $3x < -1 + 1$

বা, $3x > 2$ বা, $3x < 0$

$\therefore x > \frac{2}{3}$ $\therefore x < 0$

$\therefore x > \frac{2}{3}$ অথবা $x < 0$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে। **(Ans.)**

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3x-1}}{1 - \frac{1}{3x-1}}$

$= \frac{\frac{1}{3x-1}}{\frac{3x-1-1}{3x-1}} = \frac{1}{3x-2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন– ১৯ ▸ নিচের ধারাটি লক্ষ কর : $\frac{1}{3x+1} + \frac{1}{(3x+1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^3} + \ldots\ldots$ **একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।**

ক. x = 1 হলে ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. x = 2 হলে প্রাপ্ত ধারাটির পঞ্চম এবং দশম পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত ধারাটি, $S = \frac{1}{3x+1} + \frac{1}{(3x+1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$x = 1$ হলে, $S = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{4^2} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ **(Ans.)**

খ. এখানে, $x = 2$ হলে ধারাটি,

$S = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ধারাটির প্রথম পদ $a = \frac{1}{7}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{7} < 1$

ধারাটির n তম পদ $= ar^{n-1}$

ধারাটির 5 তম পদ $= \frac{1}{7} \times \left(\frac{1}{7}\right)^{5-1} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7^4} = \frac{1}{7^5}$ **(Ans.)**

ধারাটির 10–তম পদের সমষ্টি $= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $[\because |r| < 1]$

$= \frac{\frac{1}{7}\left(1 - \frac{1}{7^{10}}\right)}{1 - \frac{1}{7}}$

$= \frac{7^{10}-1}{7^{10}} \times \frac{1}{7} \times \frac{7}{6}$

$= \frac{7^{10}-1}{6.7^{10}}$ **(Ans.)**

গ. কোনো ধারার সাধারণ অনুপাত, $|r| < 1$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে।

$\therefore$ ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{3x+1}$

শর্তমতে, $\left|\frac{1}{3x+1}\right| < 1$

$\frac{1}{3x+1} < 0$ হলে,

$-\frac{1}{x+1} < 1$

বা, $\frac{1}{3x+1} > -1$

বা, $3x + 1 < -1$

বা, $3x < -2$

$\therefore x < -\frac{2}{3}$

আবার, $\frac{1}{3x+1} \geq 0$ হলে,

বা, $\frac{1}{3x+1} < 1$

বা, $3x + 1 > 1$

$\therefore x > 0.$

নির্ণেয় শর্ত, $x < \frac{2}{3}$ অথবা $x > 0$

প্রশ্ন–২০ ▸ $\frac{1}{3x+2} + \frac{2}{(3x+2)^2} + \frac{4}{(3x+2)^3} + \frac{8}{(3x+2)^4} + \ldots\ldots\ldots$

ক. $x = 1$ হলে, ধারাটির সাধারণ অনুপাত বের কর। ২

খ. 'ক' এ প্রাপ্ত ধারা হতে অষ্টম পদ এবং প্রথম আটটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রদত্ত ধারাটির x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

২০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

ধারাটি $\frac{1}{3x+2} + \frac{2}{(3x+2)^2} + \frac{4}{(3x+2)^3} + \frac{8}{(3x+2)^4} + \ldots$

$x = 1$ হলে, $\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \frac{8}{5^4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

যা একটি গুণোত্তর ধারা।

$\therefore$ সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{2}{5^2}}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{5}$ **(Ans.)**

খ. 'ক' হতে পাই, ধারাটি $= \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \ldots\ldots\ldots$

যার প্রথম পদ, $a = \frac{1}{5}$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{2}{5} < 1$

$\therefore$ ধারাটির অষ্টম পদ $= ar^{8-1} = \frac{1}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^7 = \frac{2^7}{5^8}$ **(Ans.)**

এবং প্রথম 8 পদের সমষ্টি $= \frac{a(1-r^8)}{1-r}$ $[\because |r| < 1]$

$= \frac{\frac{1}{5}\left\{1 - \left(\frac{2}{5}\right)\right\}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{5}\left(1 - \frac{2^8}{5^8}\right)}{\frac{3}{5}}$

$= \frac{1}{5}\left(\frac{5^8 - 2^8}{5^8}\right) \times \frac{5}{3} = \frac{5^8 - 2^8}{3.5^8}$ **(Ans.)**

গ. প্রদত্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত,

$r = \frac{2}{(3x+2)^2} \div \frac{1}{(3x+2)} = \frac{2}{3x+2}$

অসীমতক সমষ্টি থাকবে, যদি $|r| < 1$ হয়

বা, $\left|\frac{2}{3x+2}\right| < 1$

অঋণাত্মক মান নিয়ে

$\therefore \frac{2}{3x+2} < 1$

বা, $\frac{3x+2}{2} > 1$

বা, $3x + 2 > 2$

বা, $3x > 0$

$\therefore x > 0$

আবার, ঋণাত্মক মান নিয়ে

$-\left(\frac{2}{3x+2}\right) < 1$

বা, $\frac{2}{3x+2} > -1$

বা, $\frac{2}{3x+2} < -1$

বা, $3x + 2 < -2$

বা, $3x < -4$

$\therefore x < -\frac{4}{3}$

নির্ণেয় শর্ত : $x > 0$ অথবা $x < -\frac{4}{3}$

আবার, অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3x+2}}{1-\frac{2}{3x+2}}$

$= \frac{\frac{1}{3x+2}}{\frac{3x+2-2}{3x+2}}$

$= \frac{1}{3x+2} \times \frac{3x+2}{3x}$

$= \frac{1}{3x}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২১ ▸ একটি দণ্ডের দৈর্ঘ্য 1100 সে.মি.। একে 25টি অংশে বিভক্ত করা হলো। ক্ষুদ্রতম অংশ থেকে আরম্ভ করে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য সমান্তর ধারাভুক্ত এবং বৃহত্তম টুকরাটির দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্যের 10 গুণ।

ক. ক্ষুদ্রতম টুকরার দৈর্ঘ্যকে **a**, সাধারণ অন্তরকে d ধরে একটি সমীকরণ গঠন কর। ২

খ. ক্ষুদ্রতম টুকরার দৈর্ঘ্য ও সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর। ৪

গ. বৃহত্তম টুকরার দৈর্ঘ্য এবং প্রদত্ত ধারার 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

▸◂ ২১নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. এখানে, ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্য = a

টুকরা দৈর্ঘ্যের সাধারণ অন্তর = d

টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, (a + d), (a + 2d),..........

25-তম টুকরার দৈর্ঘ্য a + (25 – 1) d = a + 24d

শর্তমতে, a + 24d = 10a **(Ans.)**

খ. 'ক' থেকে পাই, a + 24d = 10a

$\therefore$ 9a – 24d = 0 .... (i)

প্রশ্নানুসারে ধারাটির যোগফল

$= a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots\ldots + (a + 24d)$

$= \frac{25}{2}\{2.a + (25 - 1)d\}$

$= \frac{25}{2}(2a + 24d)$

$= 25 (a + 12d)$

প্রশ্নমতে, 25 (a + 12d) = 1100

a + 12d = 44 .... (ii)

(ii) নং থেকে a = 44 – 12 d .... (iii)

a এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

9 (44 – 12 – 24 = 0

বা, 9 × 44 = 9 × 12d + 24d

বা, 396 = 108d + 24d

বা, 396 = 132d

$\therefore$ d = 3

d এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

a = 44 – 12 × 3 = 8

$\therefore$ a = 8 এবং d = 3 **(Ans.)**

গ. 'খ' থেকে পাই, ক্ষুদ্রতম টুকরার দৈর্ঘ্য, a = 8 সে.মি.

বৃহত্তম টুকরার দৈর্ঘ্য = 10a = 10 × 8 = 80 সে.মি. **(Ans.)**

$\therefore$ ধারাটি হলো = 8 + (8 + 3) + (8 + 2 × 3) + ...

= 8 + 11 + 14 + ...

ধারাটির একটি সমান্তর ধারা ধারাটির প্রথম 20 পদের সমষ্টি।

$S_{20} = \frac{20}{2}\{2 \times 8 + (20 - 1)3\}$ [$\because$ a = 8 এবং d = 3]

= 10 (16 + 19 × 3)

= 10 (16 + 57) = 730 **(Ans.)**

সৃজনশীল প্রশ্নব্যাংক উত্তরসহ

প্রশ্ন–২২ ▸ একটি গুণোত্তর ধারার চতুর্থ পদ 6 এবং সপ্তম পদ – 48

ক. দুইটি সমীকরণের মাধ্যমে তথ্যগুলো প্রকাশ কর। ২

খ. ধারাটি নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির ১ম 10 পদের সমষ্টি ও অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

উত্তর : ক. $ar^3 = 6$ এবং $ar^6 = -48$

খ. $-\frac{3}{4} + \frac{3}{2} - 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

গ. $225\frac{3}{4}$; অসীমতক সমষ্টি নেই।

প্রশ্ন–২৩ ▸ $U_n = n(n + 1)$ ধারাটির n তম পদ।

ক. ধারাটি নির্ণয় কর। ২

খ. ধারাটির 20 তম পদ কত? ৪

গ. ধারাটির n তম পদের সমষ্টি 72 হলে n এর মান নির্ণয় কর। ৪

উত্তর : ক. 2 + 4 + 6+ …; খ. 40; গ. 8

প্রশ্ন–২৪ ▸ $\left\{\frac{2n-1}{2n}\right\}$; n = 1, 2, 3...... একটি অনুক্রমের সাধারণ পদ।

ক. অনুক্রমটি নির্ণয় কর। ২

খ. অনুক্রমটির 10 তম ও 20 তম পদ নির্ণয় কর এবং ক্রমান্বয়ে প্রথম চারটি আংশিক সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. n–এর মান যথেষ্ট বড় হলে প্রান্তীয় মান সম্পর্কে কী বলা যায়? ৪

উত্তর : ক. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}$ ....

খ. 10 তম পদ $\frac{19}{10}$, 20 তম পদ $\frac{39}{40}$; আংশিক সমষ্টি যথাক্রমে $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{25}{12}, \frac{71}{24}$

প্রশ্ন–২৫ ▸ কোনো গুণোত্তর ধারার তৃতীয় পদ 18 এবং ষষ্ঠ পদ $\frac{2}{3}$

ক. ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত? ২

খ. এর প্রথম পদ এবং অসীমতক সমষ্টি S_∞ (যদি থাকে) নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি S_{10} হলে দেখাও যে,

$S_\infty - S_{10} = \frac{1}{243}$ ৪

উত্তর : ক. ধারাটির সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{3}$; খ. 162, 243

প্রশ্ন–২৬ ▸ $8\cdot\dot{5}\dot{1}$ এবং $1\cdot\dot{3}0\dot{5}$ দুটি আবৃত দশমিক ভগাংশ।

ক. সংখ্যা দুটিকে ধারার মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $8\cdot\dot{5}\dot{1}$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. $1\cdot\dot{3}0\dot{5}$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

উত্তর : ক. $1 + (0\cdot305 + 0\cdot000305 + 0\cdot000000305 + ...)$

খ. $\frac{281}{33}$; গ. $1\frac{305}{999}$

অধ্যায় সমন্বিত সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–২৭ ▸ একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি অপেক্ষা 8 মিটার বেশি এবং ক্ষেত্রফল 48 বর্গ মিটার।

ক. দৈর্ঘ্যকে x এবং প্রস্থকে y ধরে সমীকরণ দুইটি লেখ। ২

খ. x ও y এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x কে কোনো ধারার ১ম পদ এবং $\frac{1}{x-y}$ কে সাধারণ অনুপাত বিবেচনা করে গঠিত ধারার অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

২৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x মিটার

আয়তাকার ক্ষেত্রের প্রস্থ y মিটার

আমরা জানি, আয়তাকার ক্ষেত্রের পরিসীমা $2(x + y)$ মিটার

" " " xy বর্গমিটার

এবং (কর্ণের দৈর্ঘ্য)² = (দৈর্ঘ্য)² + (প্রস্থ)² $= x^2 + y^2$

∴ কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x^2 + y^2}$

কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি $= 2\sqrt{x^2 + y^2}$

প্রশ্নমতে, $2(x + y) = 2\sqrt{x^2 + y^2} + 8$

বা, $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y - 4$ ....(i)

এবং $xy = 48$ ....(ii)

খ. 'ক' এর (i)নং সমীকরনের উভয় পক্ষকে বর্গ করে

$x^2 + y^2 = (x + y - 4)^2$

বা, $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 8(x + y) + 16$

বা, $x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y + 16$

বা, $0 = 2xy - 8x - 8y + 16$

বা, $2xy - 8x - 8y + 16 = 0$

বা, $2 \times 48 - 8x - 8y + 16 = 0$ [$\because xy = 48$]

বা, $96 - 8x - 8y + 16 = 0$

বা, $112 - 8x - 8y = 0$

বা, $8(x + y) = 112$

বা, $x + y = 14$

বা, $x = 14 - y$ .... (iii)

(ii) সমীকরণে $x = 14 - y$ বসিয়ে পাই,

$(14 - y)y = 48$

বা, $14y - y^2 - 48 = 0$

বা, $y^2 - 14y + 48 = 0$ [উভয়পক্ষকে –1 দ্বারা গুণ করে]

বা, $y^2 - 8y - 6y + 48 = 0$

বা, $y(y - 8) - 6(y - 8) = 0$

∴ $(y - 8)(y - 6) = 0$

এখন, হয় $y - 8 = 0$ অথবা, $y - 6 = 0$

∴ $y = 8$ ∴ $y = 6$

(iii)নং সমীকরণে y এর মান বসিয়ে পাই,

$y = 8$ হলে $x = 14 - 8 = 6$

$y = 6$ হলে $x = 14 - 6 = 8$

∴ x দৈর্ঘ্য এবং y প্রস্থ এবং দৈর্ঘ্য > প্রস্থ

∴ $y = 8$ এবং $x = 6$ গ্রহণযোগ্য নয়

সুতরাং $x = 8$, $y = 6$ **(Ans).**

গ. কোনো ধারার প্রথম পদ 8 এবং সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{8-6} = \frac{1}{2}$ হলে ধারাটি হবে $8 + 4 + 2 + ...$

এখানে, ধারার প্রথম পদ, $a = 8$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{2}$

আমরা জানি,

ধারার অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$$

∴ অসীমতক সমষ্টি 16 **(Ans.)**