দশম অধ্যায়

দ্বিপদী বিস্তৃতি

অনুশীলনী ১০.১

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

■ **দুইটি পদের সমন্বয়ে গঠিত বীজগণিতীয় রাশিকে দ্বিপদী রাশি বলা হয়। যেমন :** $a + b, x - y, 1 + x, 1 - x^2, a^2 - b^2$ ইত্যাদি দ্বিপদী রাশি।

$$(1 + y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{1.2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}y^3 + ... + y^n$$

■ **দ্বিপদী $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতি :**

এখানে, $n = 0$ হলে $(1 + y)^0 = 1 + 0 + + 0.................... = 1$ [পদসংখ্যা 1]

$n = 1$ হলে $(1 + y)^1 = 1 + y + 0 .... = 1 + y$ [পদসংখ্যা 2]

$n = 2$ হলে $(1 + y)^2 = 1 + 2y + y^2 + 0............... = 1 + 2y + y^2$ [পদসংখ্যা 3]

$n = 3$ হলে $(1 + y)^3 = 1 + 3y + 3y^2 + y^3 + 0...... = 1 + 3y + 3y^2 + y^3$ [পদসংখ্যা 4]

$(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতিতে ঘাত বা শক্তির চেয়ে পদসংখ্যা 1 বেশি,অর্থাৎ $(n + 1)$ সংখ্যক পদ আছে।

দ্বিপদী সহগ : দ্বিপদী বিস্তৃতিতে y-এর বিভিন্ন ঘাতের সহগ (*Coefficient*) কে দ্বিপদী সহগ বলা হয়। 1 কে y এর সহগ বিবেচনা করতে হবে। $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতির সহগগুলোকে সাজালে আমরা পাই,

n = 0	1
n = 1	1 1
n = 2	1 2 1
n = 3	1 3 3 1
n = 4	1 4 6 4 1

লক্ষ করলে দেখবে সহগগুলো একটি ত্রিভুজের আকার ধারণ করেছে। দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগ নির্ণয়ের একটি কৌশল *"Blaise pascal"* প্রথম ব্যবহার করেন। তাই এই ত্রিভুজকে প্যাসকেলের ত্রিভুজ *(Pascal's Triangle)* বলা হয়।

প্যাসকেলের ত্রিভুজের ব্যবহার : প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে আমরা দেখতে পাই এর বাম ও ডান দিকে আছে '1'। ত্রিভুজের মাঝখানের সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটি ঠিক উপরের দুইটি সংখ্যার যোগফল।

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ॥ ১ ॥ প্যাসকেলের ত্রিভুজ বা দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে $(1 + y)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। উক্ত বিস্তৃতির সাহায্যে (i) $(1 - y)^5$ ও (ii) $(1 + 2x)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

সমাধান : প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে–

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$\therefore (1 + y)^5 = 1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5. y^4 + 1.y^5$

$= 1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5$ **(Ans.)**

i. $(1 - y)^5$

$= 1 + 5(-y) + 10(-y)^2 + 10(-y)^3 + 5(-y)^4 + 1(-y)^5$

$= 1 - 5y + 10y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5$ **(Ans.)**

ii. $(1 + 2x)^5$

$= 1 + 5.2x + 10(2x)^2 + 10(2x)^3 + 5(2x)^4 + 1(2x)^5$

$= 1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5$ **(Ans.)**

অথবা, দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে–

$(1 + y)^5 = \binom{5}{0}y^0 + \binom{5}{1}y^1 + \binom{5}{2}y^2 + \binom{5}{3}y^3 + \binom{5}{4}y^4 + \binom{5}{5}y^5$

$= 1.1 + \frac{5}{1}y + \frac{5.4}{1.2}y^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3}y^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}y^4 + 1.y^5$

$= 1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5$ **(Ans.)**

i. $(1 - y)^5$

$= \binom{5}{0}(-y)^0 + \binom{5}{1}(-y)^1 + \binom{5}{2}(-y)^2 + \binom{5}{3}(-y)^3$

$+ \binom{5}{4}(-y)^4 + \binom{5}{5}(-y)^5$

$= 1.1 + \frac{5}{1}(-y) + \frac{5.4}{1.2}(-y)^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3}(-y)^3$

$+ \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}(-y)^4 + 1(-y)^5$

$= 1 - 5y + 10y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5$ **(Ans.)**

ii. $(1 + 2x)^5$

$= \binom{5}{0}(2x)^0 + \binom{5}{1}(2x)^1 + \binom{5}{2}(2x)^2 + \binom{5}{3}(2x)^3 + \binom{5}{4}(2x)^4 + \binom{5}{5}(2x)^5$

$= 1.1 + \frac{5}{1}2x + \frac{5.4}{1.2}4x^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3}8x^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}16x^4 + 32x^5$

$= 1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ২ ॥ x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে (a) $(1 + 4x)^6$, (b) $(1 - 3x)^7$ এর প্রথম চার পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি কর।

সমাধান : (a) প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে–

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

$\therefore (1 + 4x)^6 = 1 + 6.4x + 15(4x)^2 + 20(4x)^3 + ...$(প্রথম চার পদ পর্যন্ত)

$= 1 + 24x + 240x^2 + 1280x^3 + ...$ **(Ans.)**

(b) প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে–

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

$\therefore (1 - 3x)^7 = 1 + 7(-3x) + 21(-3x)^2 + 35(-3x)^3 + ...$ (প্রথম চার পদ পর্যন্ত)

$= 1 - 21x + 189x^2 - 945x^3 + ...$ **(Ans.)**

বিকল্প পদ্ধতি :

(a) দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে–

$(1 + 4x)^6 = \binom{6}{0}(4x)^0 + \binom{6}{1}(4x)^1 + \binom{6}{2}(4x)^2 + \binom{6}{3}(4x)^3 + ...$

$= 1.1 + \frac{6}{1}4x + \frac{6.5}{1.2}16x^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}64x^3 + ..$

$= 1 + 24x + 240x^2 + 1280x^3 + ...$ **(Ans.)**

(b) দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে–

$(1 - 3x)^7$

$= 1.\binom{7}{0}(-3x)^0 + \binom{7}{1}(-3x)^1 + \binom{7}{2}(-3x)^2 + \binom{7}{3}(-3x)^3 + ...$

$= 1.1 + \frac{7}{1}(-3x) + \frac{7.6}{1.2}(-3x)^2 + \frac{7.6.5}{1.2.3}(-3x)^3 + ...$

$= 1 - 21x + 189x^2 - 945x^3 + ...$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৩ ॥ $(1 + x^2)^8$ এর বিস্তৃতির প্রথম চার পদ নির্ণয় কর। উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $(1{\cdot}01)^8$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে–

$(1 + x^2)^8 = \binom{8}{0}(x^2)^0 + \binom{8}{1}(x^2)^1 + \binom{8}{2}(x^2)^2 + \binom{8}{3}(x^2)^3 + ...$

$= 1.1 + \frac{8}{1}x^2 + \frac{8.7}{1.2}x^4 + \frac{8.7.6}{1.2.3}x^6 + ...$

$= 1 + 8x^2 + 28x^4 + 56x^6 + ...$

নির্ণেয় বিস্তৃতি $(1 + x^2)^8 = 1 + 8x^2 + 28x^4 + 56x^6 + ...$

এখন উক্ত বিস্তৃতিতে $x = 0.1$ বসিয়ে পাই

$\{1 + (0.1)^2\}^8$

$= 1 + 8(0.1)^2 + 28(0.1)^4 + 56(0.1)^6 + ...$

বা, $(1 + 0.01)^8$

$= 1 + 0.08 + 0.0028 + 0.000056 + ...$

$= 1.082856$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৪ ॥ x এর উর্ধ্বক্রম অনুসারে নিম্নোক্ত দ্বিপদীসমূহের প্রথম তিন পদ নির্ণয় কর।

(a) $(1 - 2x)^5$, (b) $(1 + 3x)^9$

তারপর, (c) $(1 - 2x)^5 (1 + 3x)^9$ কে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

সমাধান : (a) দ্বিপদী বিস্তৃতি অনুসারে,

$(1 - 2x)^5 = \binom{5}{0}(-2x)^0 + \binom{5}{1}(-2x)^1 + \binom{5}{2}(-2x)^2 + ...$

$= 1.1 + \frac{5}{1}(-2x) + \frac{5.4}{1.2}4x^2 - ....$

$= 1 - 10x + 40x^2 - ....$ **(Ans.)**

(b) দ্বিপদী বিস্তৃতি অনুসারে,

$(1 + 3x)^9 = \binom{9}{0}(3x)^0 + \binom{9}{1}(3x)^1 + \binom{9}{2}(3x)^2 + ...$

$= 1.1 + \frac{9}{1}3x + \frac{9.8}{1.2}9x^2 + ...$

$= 1 + 27x + 324x^2 + ...$ **(Ans.)**

(c) $(1 - 2x)^5 (1 + 3x)^9 = (1 - 10x + 40x^2 - ....)(1 + 27x + 324x^2 + ...)$

[সমাধান a ও b ব্যবহার করে]

$= 1(1 + 27x + 324x^2 + ...) - 10x(1 + 27x + 324x^2 + ...) + 40x^2(1 + 27x + 324x^2 + ...)$

$= 1 + 27x + 324x^2 + ... - 10x - 270x^2 - 3240x^3 - .... + 40x^2 + 1080x^3 + 12960x^4 + ...$

$= 1 + 17x + 94x^2 + ...$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৫ ॥ নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহের প্রথম চার পদ নির্ণয় কর। [দ্বিপদী বিস্তৃতি বা প্যাসকেল ত্রিভুজ এর যেকোনো একটি ব্যবহার করে।]

(a) $(1 - 2x^2)^7$; (b) $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^4$; (c) $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^7$

সমাধান :

(a) দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে–

$(1 - 2x^2)^7 = \binom{7}{0}(-2x^2)^0 + \binom{7}{1}(-2x^2)^1 + \binom{7}{2}(-2x^2)^2 + \binom{7}{3}(-2x^2)^3 + ...$

$= 1.1 + \frac{7}{1}(-2x^2) + \frac{7.6}{1.2}(-2x^2)^2 + \frac{7.6.5}{1.2.3}(-2x^2)^3 + ...$

$= 1 - 14x^2 + 84x^4 - 280x^6 + ...$ **(Ans.)**

(b) দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে–

$\left(1 + \frac{2}{x}\right)^4 = \binom{4}{0}\left(\frac{2}{x}\right)^0 + \binom{4}{1}\left(\frac{2}{x}\right)^1 + \binom{4}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^3 + ...$

$= 1.1 + \frac{4}{1}\cdot\frac{2}{x} + \frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{4}{x^2} + \frac{4.3.2}{1.2.3}\cdot\frac{8}{x^3} + ...$

$= 1 + \frac{8}{x} + \frac{24}{x^2} + \frac{32}{x^3} + ...$**(Ans.)**

(c) দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে–

$\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^7 = \binom{7}{0}\left(\frac{-1}{2x}\right)^0 + \binom{7}{1}\left(-\frac{1}{2x}\right)^1$

$$+\binom{7}{2}\left(-\frac{1}{2x}\right)^2+\binom{7}{3}\left(-\frac{1}{2x}\right)^3+.....$$

$$=1.1+\frac{7}{1}\left(\frac{-1}{2x}\right)+\frac{7.6}{1.2}\left(\frac{1}{4x^2}\right)+\frac{7.6.5}{1.2.3}\left(-\frac{1}{8x^3}\right)+.....$$

$$=1-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{21}{4}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{35}{8}\cdot\frac{1}{x^3}+.......\ \textbf{(Ans.)}$$

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ x^3 পর্যন্ত (a) $(1-x)^6$ এবং (b) $(1+2x)^6$ বিস্তৃত কর। তারপর (c) $(1+x-2x^2)^6$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

সমাধান :

(a) দ্বিপদী বিস্তৃতি অনুসারে,

$$(1-x)^6=\binom{6}{0}(-x)^0+\binom{6}{1}(-x)^1+\binom{6}{2}(-x)^2+\binom{6}{3}(-x)^3+......$$

$$=1.1+\frac{6}{1}(-x)+\frac{6.5}{1.2}(-x)^2+\frac{6.5.4}{1.2.3}(-x)^3+.....$$

$$=1-6x+15x^2-20x^3+.....\ \textbf{(Ans.)}$$

(b) দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে–

$$(1+2x)^6=\binom{6}{0}(2x)^0+\binom{6}{1}(2x)^1+\binom{6}{2}(2x)^2+\binom{6}{3}(2x)^3+.......$$

$$=1.1+\frac{6}{1}.2x+\frac{6.5}{1.2}4x^2+\frac{6.5.4}{1.2.3}8x^3+.....$$

$$=1+12x+60x^2+160x^3+.........\ \textbf{(Ans.)}$$

(c) $(1+x-2x^2)^6$

এখানে, $1+x-2x^2=(1-x)(1+2x)$

$$\therefore\ (1+x-2x^2)^6=(1-x)^6(1+2x)^6$$

$$=(1-6x+15x^2-20x^3+....)(1+12x+60x^2+160x^3+.....)$$

[সমাধান a ও b ব্যবহার করে]

$$=1+12x+60x^2+160x^3-6x-72x^2-360x^3+15x^2+100x^3-20x^3....$$

$$=1+6x+3x^2-40x^3+....\ \textbf{(Ans.)}$$

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ x এর মান যথেষ্ট ছোট হওয়ায় x^3 এবং তার উর্ধ্বঘাতের মান উপেক্ষা করা যায়। প্রমাণ কর যে, $(1+x)^5(1-4x)^4=1-11x+26x^2$.

সমাধান : দ্বিপদী বিস্তৃতি অনুসারে,

$$(1+x)^5=\binom{5}{0}x^0+\binom{5}{1}x^1+\binom{5}{2}x^2+\binom{5}{3}x^3+........$$

$$=1.1+\frac{5}{1}x+\frac{5.4}{1.2}x^2+\frac{5.4.3}{1.2.3}x^3+......$$

এবং $(1-4x)^4=\binom{4}{0}(-4x)^0+\binom{4}{1}(-4x)^1+\binom{4}{2}(-4x)^2+\binom{4}{3}(-4x)^3+.....$

$$=1.1+\frac{4}{1}(-4x)+\frac{4.3}{1.2}(-4x)^2+\frac{4.3.2}{1.2.3}(-4x)^3+$$

$$=1-16x+96x^2-256x^3+....$$

সুতরাং, $(1+x)^5(1-4x)^4$

$=(1+5x+10x^2+10x^3+......)(1-16x+96x^2-256x^3+....)$

$=1-16x+96x^2+5x-80x^2+10x^2$

$=1-11x+26x^2$

x এর মান যথেষ্ট ছোট হওয়ায় x^3 এবং তার উর্ধ্বতম ঘাতের মান উপেক্ষা করা যায়। কারণ x এর মান ক্ষুদ্র হলে x^3 এর মান আরও ক্ষুদ্র হবে।

$\therefore\ (1+x)^5(1-4x)^4=1-11x+26x^2$ **(প্রমাণিত)**

গুরুত্বপূর্ণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১. **$(1+2x)^4$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ কত?**
(ক) 8 (খ) 16 ● 32 (ঘ) 64

২. **$(1-3x)^5$ বিস্তৃতির x^3 এর সহগ কত হবে?**
(ক) 260 (খ) 270 ● –270 (ঘ) –260

৩. **$\left(1+\frac{2}{x}\right)$ এর বিস্তৃতিতে শেষ পদের মান 1 হলে, x এর মান কত?**
● 2 (খ) 8 (গ) 16 (ঘ) 256

৪. **$(1+ax)^n$ বিস্তৃতিতে পদ সংখ্যা কতটি?**
(ক) n টি (খ) n – 1 টি (গ) 2n টি ● n + 1 টি

৫. **$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^8$ –এর বিস্তৃতির x^3 এর সহগ হলো–**
(ক) $-\frac{7}{8}$ ● 0 (গ) 1 (ঘ) $\frac{7}{4}$

৬. **$1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+......$ ধারাটির ৯তম পদের মান কত?**
● $\frac{1}{81}$ (খ) $\frac{1}{27}$ (গ) $\frac{1}{9}$ (ঘ) $\frac{1}{3}$

নিচের তথ্যের আলোকে ৭ ও ৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$(x-y)^6$ একটি দ্বিপদী।

৭. **দ্বিপদীটির বিস্তৃতিতে মোট কতটি পদ পাওয়া যাবে?**
(ক) 3 (খ) 6
● 7 (ঘ) 12

৮. **$y=\frac{1}{x}$ হলে ধ্রুব পদটি কত হবে?**
● –20 (খ) 1
(গ) 4 (ঘ) 20

১০·১ : দ্বিপদী $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৯. **দুইটি পদের সমন্বয়ে গঠিত বীজগণিতীয় রাশিকে কী বলে?** (সহজ)
(ক) একপদী রাশি ● দ্বিপদী রাশি
(গ) বহুপদী রাশি (ঘ) ত্রিপদী রাশি

১০. **$(1+y)^n$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা কত?** (সহজ)
(ক) n সংখ্যক (খ) n–1 সংখ্যক
● n + 1 সংখ্যক (ঘ) n + 2 সংখ্যক

১১. **প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র আবিষ্কার করেন কে?** (সহজ)
(ক) নিউটন ● প্যাসকেল (গ) রবার্ট হুক (ঘ) আইনস্টাইন

১২. **প্যাসকেলের ত্রিভুজের বাম ও ডান দিকে কত থাকে?** (সহজ)
● 1 (খ) 2 (গ) 3 (ঘ) 0

১৩. **প্যাসকেলের ত্রিভুজের সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটি ঠিক উপরের সংখ্যা দুইটির?** (সহজ)
(ক) বিয়োগফলের সমান ● যোগফলের সমান
(গ) গুণফলের সমান (ঘ) ভাগফলের সমান

১৪. **দ্বিপদী রাশির ঘাত 4 হলে, পদসংখ্যা কত হবে?** (সহজ)

(ক) 6 টি (খ) 7 টি ● 5 টি (ঘ) 2 টি

১৫. $\binom{4}{0}$ = কত? (সহজ)

● 1 (খ) 2 (গ) 3 (ঘ) 5

১৬. $\binom{5}{3}$ এর মান কত? (মধ্যম)

(ক) 20 (খ) 25 (গ) 15 ● 10

ব্যাখ্যা : $\binom{5}{3} = \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$

১৭. $\binom{5}{4}$ এর মান কত? (মধ্যম)

(ক) 1 (খ) 20 ● 5 (ঘ) 12

১৮. n = 7 এর জন্য দ্বিপদী রাশির সহগগুলো কত? (কঠিন)

(ক) 1, 2, 6, 5, 7 (খ) 1, 7, 21, 7, 1
(গ) 1, 7, 22, 31, 71 ● 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

১৯. $\binom{7}{4}$ = কত? (মধ্যম)

(ক) $\frac{7\times4}{1\times4}$ (খ) $\frac{7\times5\times3\times1}{2\times4}$ (গ) $\frac{7\times4}{2\times2}$ ● $\frac{7\times6\times5\times4}{1\times2\times3\times4}$

২০. (সহজ)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

উপরের ত্রিভুজ মডেলটির আবিষ্কারক কে?

● প্যাসকেল (খ) থেলিস (গ) ক্যান্টর (ঘ) নেপিয়ার

২১. n = 4 এর জন্য প্যাসকেলের সূত্রের বিস্তৃতির চতুর্থ (T_{3+1}) পদের সহগ কত? (মধ্যম)

(ক) $\binom{4}{1}$ (খ) $\binom{4}{2}$ ● $\binom{4}{3}$ (ঘ) $\binom{4}{4}$

২২. $(1 + x)(1 + x)^8$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ কত? (মধ্যম)

(ক) 8 ● 9 (গ) 36 (ঘ) 45

২৩. $\left(1+\frac{1}{3}\right)^n = 1 + \frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{9} + \dots\dots\dots$ বিস্তৃতিতে ২য় পদের মান ৩য় পদের দ্বিগুণ হলে n এর মান কত? (কঠিন)

(ক) 3 (খ) − 4 ● 4 (ঘ) $\frac{1}{4}$

ব্যাখ্যা : $\frac{n}{3} = 2.\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{9}$

বা, $1 = (n-1)\frac{1}{3}$

বা, $3 = n - 1$

$\therefore n = 4$

২৪. 126 = নিচের কোনটি? (সহজ)

(ক) $\binom{6}{3}$ (খ) $\binom{7}{3}$ (গ) $\binom{8}{3}$ ● $\binom{9}{4}$

২৫. $(1 - x)^8(1 + y)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^7এর সহগ– (কঠিন)

● 35 (খ) 54 (গ) 59 (ঘ) 39

২৬. $\left(1+\frac{2}{x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম পদের সহগ – (মধ্যম)

(ক) 3 (খ) 16 (গ) 5 ● 1

২৭. $(x + 2y)^5$ রাশিতে পদসংখ্যা কয়টি? (সহজ)

(ক) 4 (খ) 5 ● 6 (ঘ) 7

২৮. $(1 + y)^n$ রাশিতে n = 0 হলে পদসংখ্যা কত? (সহজ)

(ক) n (খ) n + 1 (গ) 0 ● 1

২৯. $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতিতে (n + 1) সংখ্যক পদ আছে। এখানে n –(সহজ)

(ক) ঋণাত্মক ● ধনাত্মক (গ) ভগ্নাংশ (ঘ) অধনাত্মক

৩০. $(1 + 2x)^4$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ কত? (মধ্যম)

(ক) 24 (খ) 16 ● 32 (ঘ) 1

৩১. $(1 + y)^0$ = কত? (সহজ)

(ক) 1 + y (খ) y ● 1 (ঘ) 1 + 2y

৩২. $(1 - y)^2$ এর বিস্তৃতিতে y এর সহগ কত? (মধ্যম)

(ক) 1 (খ) 0 (গ) – 1 ● – 2

৩৩. $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা একটি হলে, n এর মান কত? (সহজ)

(ক) 5 (খ) 4 (গ) 2 ● 0

৩৪. $(1 + x)^8$ এর বিস্তৃতিতে কতগুলো পদ আছে? (সহজ)

● 9 (খ) 6 (গ) 3 (ঘ) 12

৩৫. $(1 - 2y + y^2)$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা 7 হলে n এর মান কত? (কঠিন)

(ক) 2 ● 3 (গ) 4 (ঘ) 6

৩৬. $(1 + y)^3$ এর দ্বিপদী বিস্তৃতিতে সহগগুলোর যোগফল কত? (মধ্যম)

(ক) 4 (খ) 18 ● 8 (ঘ) 16

৩৭. n = 5 এর জন্য $(1 + y)^n$ এর পদগুলোর সহগ কোনগুলো? (কঠিন)

(ক) 1,4,6,4,1 (খ) 1 3 3 1 (গ) 1 2 1 ● 1 5 10 10 5 1

৩৮. $(1 + 3x)^5$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ কত? (মধ্যম)

(ক) 1 ● 90 (গ) 15 (ঘ) 277

৩৯. $\left(2-\frac{x}{2}\right)^7$-এর বিস্তৃতিতে x-এর মান কত হলে $(1.995)^7$-এর মান পাওয়া যাবে? (কঠিন)

● 0.01 (খ) 0.1 (গ) 0.008 (ঘ) 0.05

৪০. $(1 + y)^5$ এর বিস্তৃতিতে চতুর্থ পদের সহগ কোনটি? (সহজ)

(ক) $\binom{4}{2}$ (খ) $\binom{4}{5}$
● $\binom{5}{3}$ (ঘ) $\binom{5}{6}$

৪১. $(1 + 3x)^5$-এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ কত? (মধ্যম)

(ক) 1 (খ) 3 (গ) 5 ● 15

৪২. $(1 - 3x)^5$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ কত? (মধ্যম)

(ক) 15 ● – 15 (গ) 0 (ঘ) 2

৪৩. $\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে কোনটির সহগ শূন্য? (কঠিন)

(ক) x^4 (খ) x^3 (গ) x^2 ● x

৪৪. $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান কত? (মধ্যম)

● 1 (খ) 7 (গ) 6 (ঘ) 12

৪৫. $\left(1+\frac{2}{x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে দ্বিতীয় পদের মান 2 হলে, x এর মান কত? (মধ্যম)

(ক) – 8 (খ) 0 ● 8 (ঘ) 16

৪৬. $\left(2x+\frac{1}{6x}\right)^{10}$ এর x বর্জিত পদের মান কত? (মধ্যম)

● $\frac{28}{27}$ (খ) $\frac{27}{28}$ (গ) 1 (ঘ) 3

৪৭. $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ কোনটি? (মধ্যম)

(ক) 448 ● 240 (গ) 120 (ঘ) 9.90

৪৮. $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{10}$ -এর মধ্যপদ কোনটি? (সহজ)

● 6 ⓦ 4 ⓖ 5 ⓖ 7

৪৯. নিচের কোনটি দ্বিপদী রাশি? (সহজ)

ⓚ x^2 ⓦ y^n

● $(1 + x)^2$ ⓖ $(x + y + z)^n$

৫০. $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে পদ সংখ্যা 8 হলে, n এর মান কত? (সহজ)

● 7 টি ⓦ 8 টি

ⓖ 9 টি ⓖ 10 টি

৫১. $\left(1+\frac{x}{2}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে n এর মান 3 হলে পদসংখ্যা কত? (সহজ)

ⓚ 3 টি ● 4 টি ⓖ 5 টি ⓖ 2 টি

৫২. $10^y = 1$ হলে y এর মান নিচের কোনটি? (সহজ)

● 0 ⓦ 1 ⓖ 2 ⓖ 10

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৫৩. i.
```
      1
    1   1
  1   2   1
1   3   3   1
```
ii.
```
      1
    1   2   1
  1   3   3   1
1   4   4   4   1
```
iii.
```
        1
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
1   4   6   4   1
```
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

৫৪. i. $(1 + y)^4 = 1 + 4y + 6y^2 + 4y^3 + y^4$

ii. $(1 + y)^5 = 1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5$

iii. $(1 + y)^6 = 1 + 6y + 15y^2 + 20y^4 + 64y^5 + y^6$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

● i ও ii ⓦ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

৫৫. বিস্তৃতির নিয়মানুযায়ী–

i. $\binom{4}{0} = 1$

ii. $\binom{4}{1} = 4$

iii. $\binom{4}{2} = 6$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ⓦ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও ii

ব্যাখ্যা : $\binom{4}{0} = 1$ $\binom{4}{1} = \frac{4}{1} = 4$ $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$

৫৬. $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতিতে–

i. n = 3 হলে সহগগুলো 1 3 3 1

ii. n = 5 হলে সহগগুলো 1 5 10 10 5 1

iii. n = 6 হলে সহগগুলো 1 7 21 35 35 21 7 1

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii ⓦ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

৫৭. i. $\binom{5}{5} = 1$

ii. $\binom{5}{0} = 1$

iii. $\binom{3}{3} = 3$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii ⓦ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

৫৮. $(1 + y)^n$ একটি দ্বিপদী রাশি হলে –

i. n এর মান 2 হতে পারে

ii. এর বিস্তৃতিতে (n + 1)টি পদ থাকবে

iii. এর বিস্তৃতিতে শেষপদ y^n

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ⓦ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

৫৯. $(1 + 3y^2 + 3y + y^3)^6$ এর বিস্তৃতিতে –

i. 7টি পদ আছে ii. 19টি পদ আছে

iii. ২য় পদটি $\binom{18}{1}y$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓦ i ও iii ● ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

$(1 + y)^8 = \binom{8}{0} y^0 + \binom{8}{1} y^1 + \binom{8}{2} y^2 + \ldots\ldots\ldots$

উপরের তথ্যের আলোকে ৬০ – ৬২ নং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

৬০. y^5 এর সহগ নিচের কোনটি? (সহজ)

ⓚ 35 ⓦ 28 ● 56 ⓖ 70

৬১. y, y^3, y^5 এর সহগগুলোর যোগফল কোনটি? (মধ্যম)

● 120 ⓦ 106 ⓖ 134 ⓖ 126

৬২. y = 0.1 হলে $(1 + y)^8$ এর মান কত? (মধ্যম)

ⓚ 2.501 ⓦ 2.087 ● 2.144 ⓖ 1.083

নিচের তথ্যের আলোকে ৬৩ – ৬৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

```
      1
    1   1
  1   a   1
1   b   c   1
```
প্যাসকেল ত্রিভুজ

৬৩. a এর মান কত? (সহজ)

ⓚ 1 ● 2 ⓖ 3 ⓖ 21

৬৪. b এর মান কত? (সহজ)

ⓚ 2 ● 3 ⓖ 31 ⓖ 56

৬৫. abc এর মানের গুণফল কত? (সহজ)

ⓚ 8 ⓦ 9 ⓖ 36 ● 18

নিচের তথ্যের আলোকে ৬৬ – ৬৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$(1 + x)^5$ এর বিস্তৃতিতে T_{2+1} ও T_{3+1} পদের সহগ সমান।

৬৬. তৃতীয় পদ কোনটি? (সহজ)

ⓚ $\binom{5}{0}x^2$ ● $\binom{5}{2}x^2$ ⓖ $\binom{5}{0}x^3$ ⓖ $\binom{5}{2}x^3$

৬৭. তৃতীয় পদের মান 10 হলে, x = কত? (মধ্যম)

● 1 ⓦ 2 ⓖ 5 ⓖ 10

৬৮. চতুর্থ পদ কত? (মধ্যম)

ⓚ 5 ● 10 ⓖ 15 ⓖ 21

নিচের তথ্যের আলোকে ৬৯ ও ৭০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$(1 + y)^n (1 + y)^{n-1}$ যেখানে n একটি পূর্ণসংখ্যা।

৬৯. $(1 + y)^{n-1}$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদসংখ্যা– (সহজ)

● n সংখ্যক ⓚ n + 1 সংখ্যক ⓖ n – 1 ⓖ 2n

৭০. $(1 + y)^n$ এর y^n এর সহগ নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ $\binom{n}{1}$ ⓚ $\binom{2n}{1}$ ⓖ $\binom{n}{0}$ ● $\binom{n}{n}$

নির্বাচিত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৭১. $(1 + x)^8$ এর বিস্তৃতিতে কতগুলো পদ আছে?

ⓚ 7 ⓚ 8 ● 9 ⓖ 17

৭২. $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতিতে n-তম পদের মান কত?

ⓚ 1 ⓚ $\binom{n}{1} y^n$ ● ny^{n-1} ⓖ y^n

৭৩. $(2x + 3y)^4$ একটি দ্বিপদী রাশি। উহার পদসংখ্যা কত?

ⓚ 4 ● 5 ⓖ 6 ⓖ 7

৭৪. $(b + y)^n$ বিস্তৃতিতে n একটি–

ⓚ ঋণাত্মক ● ধনাত্মক ⓖ শূন্য ⓖ ভগ্নাংশ

৭৫. $(1 – x)\left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ কত?

ⓚ – 1 ⓚ $-\frac{1}{2}$ ⓖ $\frac{1}{2}$ ● 3

৭৬. $(1 + x)^n$ রাশিতে n = 0 হলে পদসংখ্যা কত?

● 1 ⓚ 0 ⓖ n ⓖ n + 1

৭৭. $(1 + y)^5$ এর বিস্তৃতিতে–

i. পদসংখ্যা 5টি

ii. ২য় পদ = $^5C_1X^1$

iii. শেষ পদ = X^5

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ● ii ও iii ⓖ i ও iii ⓖ i, ii ও iii

সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১ ▸ $128\left(\frac{1}{2} + x^2\right)^8$ **এবং** $128\left(\frac{1}{2} - x^2\right)^7$ **দুইটি দ্বিপদী।**

ক. দ্বিপদীদ্বয়কে $(1 + ax^2)^n$ আকারে প্রকাশ কর। ২

খ. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে দ্বিপদীদ্বয়কে বিস্তৃত কর। ৪

গ. দেখাও যে, $(1 + 2x^2)^7$ থেকে $(1 – 2x^2)^7$ এর বিয়োগফল সর্বদা ধনাত্মক। ৪

▸◂ ১ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $128\left(\frac{1}{2} + x^2\right)^7 = 2^7\left(\frac{1}{2} + x^2\right)^7$

$= \left\{2\left(\frac{1}{2} + x^2\right)\right\}^7$

$= (1 + 2x^2)^7$ **(Ans.)**

এবং $128\left(\frac{1}{2} - x^2\right)^7 = 2^7\left(\frac{1}{2} - x^2\right)^7$

$= \left\{2\left(\frac{1}{2} - x^2\right)\right\}^7$

$= (1 – 2x^2)^7$ **(Ans.)**

খ. 'ক' হতে পাই, দ্বিপদীদ্বয় $(1 + 2x^2)^7$ ও $(1 – 2x^2)^7$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে–

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

$(1 + 2x^2)^7 = 1 + 7(2x^2) + 21(2x^2) + 35(2x^2)^3 + 35(2x^2)^4$
$+ 21 (2x^2)^5 + 7(2x^2)^6 + (2x^2)^7$
$= 1 + 14x^2 + 21.4x^4 + 35.8x^6 + 35.16x^8 + 21.32x^{10}$
$+ 7.64x^{12} + 128x^{14}$
$= 1 + 14x^2 + 84x^4 + 280x^6 + 560x^8 + 672x^{10} + 448x^{12}$
$+ 128x^{14}$

এবং $(1 – 2x^2)^7 = \{1 + (– 2x^2)\}^7$
$= 1 + 7(– 2x^2) + 21.(– 2x^2)^2 + 35(– 2x^2)^3 + 35(– 2x^2)^4$
$+ 21(– 2x^2)^5 + 7(– 2x^2)^6 + (– 2x^2)^7$
$= 1 – 7.2x^2 + 21.4x^4 – 35.8x^6 + 35.16x^8$
$– 21.32x^{10} + 7.64x^{12} – 128x^{14}$
$= 1 – 14x^2 + 84x^4 – 280x^6 + 560x^8 – 672x^{10}$
$+ 448x^{12} – 128x^{14}$ **(Ans.)**

গ. 'খ' থেকে পাই, $(1 + 2x^2)^7 = 1 + 14x^2 + 84x^4 + 280x^6$
$+ 560x^8 + 672x^{10} + 448x^{12} + 128x^{14}$

এবং $(1 – 2x^2)^7 = 1 – 14x^2 + 84x^4 – 280x^6 + 560x^8$
$– 672x^{10} + 448x^{12} – 128x^{14}$

$\therefore (1 + 2x^2)^7 – (1 – 2x^2)^7$
$= 1+ 14x^2 + 84x^4 + 280x^6 + 560x^8 + 672x^{10} + 448x^{12}$
$+ 128x^{14} – 1 + 14x^4 – 84x^4 + 280x^6 – 560x^8 + 672x^{10}$
$– 448x^{12} + 128x^{14}$
$= 28x^2 + 560x^6 + 1344x^{10} + 256x^{14}$
$= 4x^2 (7 + 140x^4 + 336x^8 + 64x^{12})$

এখানে x এর যেকোনো মানের জন্য $4x^2$ এবং $(7 + 140x^4 + 336x^8 + 64x^{12})$ অঋণাত্মক সংখ্যা

$\therefore (1 + 2x^2)^7$ থেকে $(1 – 2x^2)^7$ এর বিয়োগফল সর্বদা ধনাত্মক।

(দেখানো হলো)

প্রশ্ন–২ ▸ $\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^8$

ক. দ্বিপদী রাশি কী? ২

খ. দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে প্রদত্ত রাশির x^3, x^4 ও x^6 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

গ. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে 'খ' এ প্রাপ্ত মানের

সত্যতা যাচাই কর। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দুইটি পদের সমন্বয়ে গঠিত বীজগণিতীয় রাশিকে দ্বিপদী রাশি বলা হয়।

$a + b, x - y, 1 + x, 1 - x^2, a^2 - b^2$ ইত্যাদি দ্বিপদী রাশি।

খ. দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে পাই,

$$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{8} = \binom{8}{0}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^{0} + \binom{8}{1}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^{1} + \binom{8}{2}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^{2} + \binom{8}{3}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^{3} + \binom{8}{4}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 1.1 + \frac{8}{1}\cdot\left(-\frac{x^2}{4}\right) + \frac{8.7}{1.2}\cdot\frac{x^4}{16} + \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\cdot\left(-\frac{x^6}{64}\right) + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\cdot\left(\frac{x^8}{256}\right) + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 - 2x^7 + \frac{7}{4}x^4 - \frac{7}{8}x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{8}$ এর বিস্তৃতিতে দেখা যাচ্ছে x^3 এর সহগযুক্ত পদ নেই।

অর্থাৎ x^3 এর সহগ 0, x^4 এর সহগ $\frac{7}{4}$ এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$.

গ. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে :

$$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{8} = 1 + 8\left(-\frac{x^2}{4}\right) + 28\left(-\frac{x^2}{4}\right)^{2} + 56\left(-\frac{x^2}{4}\right)^{3} + 70\left(-\frac{x^2}{4}\right)^{4} + 56\left(-\frac{x^2}{4}\right)^{5} + 28\left(\frac{-x^2}{4}\right)^{6} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 - \frac{8}{4}x^2 + \frac{28}{16}x^4 - \frac{56}{64}x^6 + \frac{70}{256}x^8 - \frac{56}{1024}x^{10} + \frac{28}{4096}x^{12}$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{7}{4}x^4 - \frac{7}{8}x^6 - \frac{7}{8}x^6 + \frac{35}{128}x^8 - \frac{7}{128}x^{10} + \frac{7}{1024}x^{12}$$

$\therefore$ x^3 এর সহগ 0, x^4 এর সহগ $\frac{7}{4}$ এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$.

'খ' হতে প্রাপ্ত,

x^3 এর সহগ 0, x^4 এর সহগ $\frac{7}{4}$ এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$.

$\therefore$ 'খ'– এ প্রাপ্ত মান সঠিক।

প্রশ্ন–৩ ▸ $(2 - x)$ এবং $\left(1+\frac{1}{2}x\right)^{8}$ দুইটি দ্বিপদী রাশি।

ক. দ্বিপদী $(1 + y)^n$ –এর বিস্তৃতি লেখ। ২

খ. x-এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে রাশি দুইটির গুণফলকে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ৪

গ. প্যাসেকেলের ত্রিভুজের মাধ্যমে 'খ' এর বিস্তৃতিটি যাচাই কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দ্বিপদী $(1 + y)^n$ –এর বিস্তৃতি নিম্নরূপ–

প্রশ্ন–৪ ▸ $(1 + 3x)^4$ একটি দ্বিপদী রাশি :

ক. দ্বিপদী রাশি বলতে কী বোঝ? ২

খ. প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে প্রদত্ত দ্বিপদী রাশিকে বিস্তৃত কর। ৪

গ. উক্ত বিস্তৃতি রাশি থেকে $(1.3)^4$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দুইটি পদের সমন্বয়ে গঠিত বীজগণিতীয় রাশিকে দ্বিপদী রাশি বলে।

$$(1 + y)^n = \binom{n}{0}y^0 + \binom{n}{1}y^1 + \binom{n}{2}y^2 + \binom{n}{3}y^3 + \ldots\ldots + \binom{n}{n}y^n \ \textbf{(Ans.)}$$

খ. দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে পাই,

$$(2-x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^{8} = (2-x)\left[\binom{8}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^{0} + \binom{8}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^{1} + \binom{8}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2} + \binom{8}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{3} + \binom{8}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^{4} + \ldots\ldots\right]$$

বা, $(2-x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^{8} = (2-x)\left[1.1 + \frac{8}{1}\cdot\frac{x}{2} + \frac{8.7}{1.2}\cdot\frac{x^2}{4} + \frac{8.7.6}{1.2.3}\cdot\frac{x^3}{8} + \ldots\ldots\right]$

$$= (2 - x)(1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$= (2 + 8x + 14x^2 + 14x^3 + \ldots\ldots) + (-x - 4x^2 - 7x^3 - 7x^4 - \ldots\ldots)$$

$$= 2 + 7x + 10x^2 + 7x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore (2-x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^{8} = 2 + 7x + 10x^2 + 7x^3 + \ldots\ldots\ \textbf{(Ans.)}$$

গ.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে পাই,

$$(2-x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^{8}$$

$$= (2-x)\left[1 + 8\left(\frac{1}{2}x\right) + 28\left(\frac{1}{2}x\right)^{2} + 56\left(\frac{1}{2}x\right)^{3} + 70\left(\frac{1}{2}x\right)^{4} + \ldots\ldots\ldots\right]$$

$$= (2-x)\left[1 + \frac{8}{2}x + \frac{28}{4}x^2 + \frac{56}{8}x^3 + \frac{70}{16}x^4 + \ldots\ldots\right]$$

$$= (2-x)\left(1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + \frac{35}{8}x^4 + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$$= \left(2 + 8x + 14x^2 + 14x^3 + \frac{35}{4}x^4 + \ldots\ldots\right) - \left(x + 4x^2 + 7x^3 + 7x^4 + \frac{35}{8}x^5 + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$= 2 + 7x + 10x^2 + 7x^3 + \frac{7}{4}x^4 + \ldots\ldots\ldots$ যা দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাওয়া বিস্তৃতির অনুরূপ।

$\therefore$ প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃতিটি যাচাই করা হলো।

খ. প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্রের সাহায্যে $(1 + 3x)^4$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$\therefore (1 + 3x)^4$

$= 1 + 4(3x) + 6(3x)^2 + 4(3x)^3 + 1(3x)^4$

$= 1 + 12x + 54x^2 + 108x^3 + 81x^4$ **(Ans.)**

গ. ‘খ’ হতে প্রাপ্ত $(1 + 3x)^4 = 1 + 12x + 54x^2 + 108x^3 + 81x^4$.

এখন উক্ত বিস্তৃতিতে $x = 0.1$ বসিয়ে পাই,

$(1 + 3 \times 0.1)^4$

$= 1 + 12 \times (0.1) + 54(0.1)^2 + 108(0.1)^3 + 81\,(0.1)^4$.

বা, $(1 + 0.3)^4 = 1 + 1.2 + 0.54 + 0.108 + 0.0081$.

$\therefore (1.3)^4 = 2.8561$. **(Ans.)**

প্রশ্ন–৫ ▸ $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^6$

ক. $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^3$ কে বিস্তৃত কর। ২

খ. প্রদত্ত দ্বিপদী রাশিকে প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্রের সাহায্যে বিস্তৃতি কর। ৪

গ. প্রদত্ত দ্বিপদী রাশিকে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে x^4 পর্যন্ত বিস্তৃতি করে x^3 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^3$ এর বিস্তৃতি

$= 1 + 3\left(-\frac{x^2}{4}\right)^1 + 3\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2 + \left(-\frac{x^2}{4}\right)^3$

$= 1 - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x^4}{16} - \frac{x^6}{64}$ **(Ans.)**

খ. $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^6$ কে প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

$\therefore \left(1-\frac{x^2}{4}\right)^6$ এর বিস্তৃতি

$= 1 + 6\left(-\frac{x^2}{4}\right)^1 + 15\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2 + 20\left(-\frac{x^2}{4}\right)^3$

$+ 15\left(-\frac{x^2}{4}\right)^4 + 6\left(-\frac{x^2}{4}\right)^5 + 1\left(-\frac{x^2}{4}\right)^6$

$= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{16}x^4 - \frac{5}{16}x^6 + \frac{15}{256}x^8 - \frac{3}{512}x^{10} + \frac{1}{4096}x^{12}$ **(Ans.)**

গ. $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^6$ কে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে x^4 পর্যন্ত বিস্তৃত করে পাই,

$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^6 = \binom{6}{0}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^0 + \binom{6}{1}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^1 + \binom{6}{2}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2 + \binom{6}{3}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^3 + ...$

$= 1 + 6\left(-\frac{x^2}{4}\right) + \frac{15}{16}x^4 - ....$

$= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{16}x^4 - ....$

উক্ত বিস্তৃতিতে, x^3 এর সহগ 0.

প্রশ্ন–৬ ▸ $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতির দ্বিপদী সূত্রটি নিম্নরূপ :

$(1 + y)^n = 1 + \binom{n}{1}y + \binom{n}{2}y^2 + ... + y^n$.

ক. $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতির সূত্রটি লেখ। ২

খ. সূত্রটি থেকে $(1 + 3x)^5$ কে বিস্তৃত কর। ৪

গ. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে $(1 - 3x)^5$ কে বিস্তৃত কর এবং ‘খ’ ও ‘গ’ থেকে দেখাও যে উভয়ের বিস্তৃতি একই শুধু চিহ্ন আলাদা। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতি

$= \binom{n}{o}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n$.

খ. ‘ক’ এ x এর পরিবর্তে $3x$ বসিয়ে পাই,

$(1+3x)^5 = \binom{5}{0}(3x)^0 + \binom{5}{1}(3x)^1 + {}^{5}_{2}(3x)^2 + \binom{5}{3}(3x)^3 + {}^{5}_{4}(3x)^4 + {}^{5}_{5}(3x)^5$.

$= 1 + 15x + 10(9x^2) + 10(27x^3) + 5(81x^4) + 243x^5$.

$= 1 + 15x + 90x^2 + 270x^3 + 405x^4 + 243x^5$. **(Ans)**

গ. প্যাসকেলের ত্রিভুজটি হলো :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$\therefore$ প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে পাই,

$(1 - 3x)^5 = 1 + 5(-3x) + 10(-3x)^2 + 10(-3x)^3 + 5(-3x)^4 + (-3x)^5$

$= 1 - 15x + 10(9x^2) + 10(-27x^3) + 5(81x^4) - 243x^5$

$= 1 - 15x + 90x^2 - 270x^3 + 405x^4 - 243x^5$

‘খ’ ও ‘গ’ হতে দেখা যাচ্ছে $(1 + 3x)^5$ ও $(1 - 3x)^5$ এর বিস্তৃতি একই শুধু সহগের চিহ্ন আলাদা (**দেখানো হলো**)

প্রশ্ন–৭ ▸ $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতির দ্বিপদী সূত্রটি নিম্নরূপ :

$(1 + y)^n = 1 + \binom{n}{1}y + \binom{n}{2}y^2 + \binom{n}{3}y^3 + ...\binom{n}{n-1}y^{n-1} + y^n$.

ক. সূত্রটি ব্যবহার করে $(1 + x)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. ‘ক’ এর বিস্তৃতির সাহায্যে $(1 - 4x)^5$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর মান যথেষ্ট ছোট হলে x^3 এবং তার উর্ধ্বঘাতের মান উপেক্ষা করা যায়। প্রমাণ কর যে $(1 + x)^5(1 - 4x)^5 = 1 - 15x + 70x^2$. ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতিতে $y = x$ ও $n = 5$ ব্যবহার করে পাই,

$(1 + x)^5$

$= \binom{5}{0}x^0 + \binom{5}{1}x^1 + \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^3 + \binom{5}{4}x^4 + \binom{5}{5}x^5$.

$= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$.

খ. ‘ক’–এর বিস্তৃতিতে x এর পরিবর্তে $(-4x)$ বসিয়ে পাই,

$(1 - 4x)^5$

$= 1 + 5(-4x) + 10(-4x)^2 + 10(-4x)^3 + 5(-4x)^4 + (-4x)^5$.

$= 1 - 5 \times 4x + 10 \times 16x^2 - 10 \times 64x^3 + 5 \times 256x^4 - 1024x^5$.

$= 1 - 20x + 160x^2 - 640x^3 + 1280x^4 - 1024x^5$ **Ans.**

গ. x এর মান যথেষ্ট ছোট হলে x^3 এবং তার উর্ধ্বঘাতের মান উপেক্ষা করা যায়। এক্ষেত্রে (ক) ও (খ) হতে পাই,

$(1 + x)^5 = 1 + 5x + 10x^2$

এবং $(1 - 4x)^5 = 1 - 20x + 160x^2$

$\therefore (1 + x)^5(1 - 4x)^5$

$= (1 + 5x + 10x^2)(1 - 20x + 160x^2)$

$= 1 - 20x + 160x^2 + 5x - 100x^2 + 10x^2$

$= 1 - 15x + 70x^2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৮ ▸ $(1 + y)^n$ একটি দ্বিপদী রাশি।

ক. $n = 6$ ও $n = 7$ এর জন্য দ্বিপদী সহগ নির্ণয় কর। ২

খ. $n = 8$ ও $n = 9$ এর জন্য বিস্তৃতিসমূহ নির্ণয় কর। $y = 2x$ এবং $n = 6$ এর জন্য দ্বিপদীটি বিস্তৃতি কর। ৪

গ. 'খ' এর সাহায্যে $(2.982)^6$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

▸◂ ৮ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজ নিম্নরূপ :

$$\begin{array}{c}1\\1\quad 1\\1\quad 2\quad 1\\1\quad 3\quad 3\quad 1\\1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1\end{array}$$

$\therefore n = 6$ হলে দ্বিপদী সহগ = 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

এবং $n = 7$ হলে দ্বিপদী সহগ = 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

খ. প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে–

$(1 + y)^8 = 1 + 8y + 28y^2 + 56y^3 + 70y^4 + 56y^5 + 28y^6 + 8y^7 + y^8.$

এবং $(1 + y)^9 = 1 + 9y + 36y^2 + 84y^3 + 126y^4 + 126y^5 + 84y^6 + 36y^7 + 9y^8 + y^9.$

$y = 2x$ এবং $n = 6$ হলে দ্বিপদীটি $(1 + 2x)^6$

$\therefore (1 + 2x)^6 = 1 + 6(2x) + 15(2x)^2 + 20(2x)^3 + 15(2x)^4 + 6(2x)^5 + (2x)^6.$

$= 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6.$

গ. 'খ' থেকে পাই,

$(1 + 2x)^6 = 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6$

এখন $(1 + 2x) = 2.982$

বা, $2x = 2.982 - 1$

$\therefore x = \frac{1.982}{2} = 0.991$

$x = 0.991$ বসিয়ে পাই,

$\{1 + 2(0.991)\}^6$

$= 1 + 12(0.991) + 60(0.991)^2 + 160(0.991)^3 + 240(0.991)^4 + 192(0.991)^5 + 64(0.991)^6.$

বা, $(1 + 1.982)^6 = 1 + 11.892 + 58.925 + 155.719 + 231.476 + 183.514 + 60.621.$

$\therefore (2.982)^6 = 703.147$ (**Ans.**)

প্রশ্ন–৯ ▸ $128\left(\frac{1}{2} + x^2\right)^7$ এবং $128\left(\frac{1}{2} - x^2\right)^7$ দুইটি দ্বিপদী রাশি।

ক. $128\left(\frac{1}{2} + x^2\right)^7$ কে $(1 + ax^2)^n$ আকারে প্রকাশ কর। ২

খ. $128\left(\frac{1}{2} - x^2\right)^7$ কে বিস্তৃতি কর। ৪

গ. দেখাও যে $(1 + 2x^2)^7$ থেকে $(1 - 2x^2)^7$ এর বিয়োগ ফল সর্বদা ধনাত্মক। ৪

▸◂ ৯ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $128\left(\frac{1}{2} + x^2\right)^7 = 2^7\left(\frac{1}{2} + x^2\right)^7$

$= \left\{2\left(\frac{1}{2} + x^2\right)\right\}^7$

$= (1 + 2x^2)^7$ **Ans.**

খ. $128\left(\frac{1}{2} - x^2\right)^7$ এর $(1 + ax^2)^n$ আকার হবে $(1 - 2x^2)^7$.

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে–

$$\begin{array}{c}1\\1\quad 1\\1\quad 2\quad 1\\1\quad 3\quad 3\quad 1\\1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1\end{array}$$

$\therefore (1 - 2x^2)^7$ এর বিস্তৃতি

$1 + 7(-2x^2) + 21(-2x^2)^2 + 35(-2x^2)^3 + 35(-2x^2)^4 + 21(-2x^2)^5 + 7(-2x^2)^6 + 1(-2x^2)^7.$

$= 1 - 7.2x^2 + 21.4x^4 - 35.8x^6 + 35.16x^8 - 21.32x^{10} + 7.64x^{12} - 128x^{14}.$

$= 1 - 14x^2 + 84x^4 - 280x^6 + 560x^8 - 672x^{10} + 448x^{12} - 128x^{14}.$

অনুরূপভাবে, $(1 + 2x^2)^7$

$= 1 + 14x^2 + 84x^4 + 280x^6 + 560x^8 + 672x^{10} + 448x^{12} + 128x^{14}.$

গ. 'খ' থেকে পাই,

$(1 + 2x^2)^7 = 1 + 14x^2 + 84x^4 + 280x^6 + 560x^8 + 672x^{10} + 448x^{12} + 128x^{14}.$

এবং $(1 - 2x^2)^7 = 1 - 14x^2 + 84x^4 - 280x^6 + 560x^8 - 672x^{10} + 448x^{12} - 128x^{14}.$

$\therefore (1 + 2x^2)^7 - (1 - 2x^2)^7.$

$= 1 + 14x^2 + 84x^4 + 280x^6 + 560x^8 + 672x^{10} + 448x^{12} + 128x^{14} - 1 + 14x^2 - 84x^4 + 280x^6 - 560x^8 + 672x^{10} - 448x^{12} + 128x^{14}.$

$= 28x^2 + 560x^6 + 1344x^{10} + 256x^{14}$

$= 4x^2(7 + 140x^4 + 336x^8 + 64x^{12})$

x এর যেকোনো মানের জন্য $4x^2$ এবং $(7 + 140x^4 + 336x^8 + 64x^{12})$ ধনাত্মক সংখ্যা।

$\therefore (1 + 2x^2)^7$ থেকে $(1 - 2x^2)^7$ এর বিয়োগফল সর্বদা ধনাত্মক সংখ্যা। (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–১০ ▸ $(1 + ax)^6$ একটি দ্বিপদী রাশি।

ক. উক্ত রাশিকে বিস্তৃতি কর। ২

খ. $(1-x)(1 + ax)^6$ কে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃতি কর। ৪

গ. $(1-x)(1 + ax)^6$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃতি করলে যদি $1 + bx^2$ পাওয়া যায় তবে a, b এর মান নির্ণয় কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $(1 + ax)^6$

$= \binom{6}{0}(ax)^0 + \binom{6}{1}(ax)^1 + \binom{6}{2}(ax)^2 + \binom{6}{3}(ax)^3 + \binom{6}{4}(ax)^4 + ...$

$= 1 + 6ax + 15a^2x^2 + 20a^3x^3 + 15a^4x^4 + ...$

খ. 'ক' হতে আমরা পাই,

$\therefore (1 + ax)^6 = 1 + 6ax + 15a^2x^2 + ...$

আবার, $(1 - x)(1 + ax)^6$.

$= (1 - x)(1 + 6ax + 15a^2x^2 + ...)$

$= (1 + 6ax + 15a^2x^2 + ...) - (x + 6ax^2 + 15a^2x^3 + ...)$

$= 1 + (6a - 1)x + (15a^2 - 6a)x^2 - 15a^2x^3 + ...$

গ. 'খ' হতে পাই,

$(1-x)(1 + ax)^6$

$= 1 + (6a - 1)x + (15a^2 - 6a)x^2 - 15a^2x^3 + ...$

শর্তমতে,

$1 + (6a - 1)x + (15a^2 - 6a)x^2 - 15a^2x^3 + ... = 1 + bx^2$

উভয়পক্ষ হতে x এবং x^2 এর সহগ তুলনা করে পাই,

$6a - 1 = 0$

বা, $6a = 1, \therefore a = \frac{1}{6}$

এবং $15a^2 - 6a = b$

বা, $15\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 6.\frac{1}{6} = b$

বা, $15\times\frac{1}{36} - 1 = b$

বা, $\frac{5}{12} - 1 = b$

বা, $\frac{5-12}{12} = b$

বা, $\frac{-7}{12} = b$

নির্ণেয় মান $a = \frac{1}{6}$ এবং $b = \frac{-7}{12}$

প্রশ্ন–১১ ▸ দেওয়া আছে, $A = \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^8$, $B = (1 + ax)^6$ এবং $C = (1 - x)$ ।

ক. a = 1 হলে B এর বিস্তৃতিটি নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, A এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ শূন্য এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$ । ৪

গ. যদি $(C \times B)$ কে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃতি করলে $(1 + bx^2)$ পাওয়া যায় তবে a ও b এর মান নির্ণয় কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $B = (1 + ax)^6$

a = 1 হলে, $B = (1 + x)^6$

$= \binom{6}{0}x^0 + \binom{6}{1}x^1 + \binom{6}{2}x^2 + \binom{6}{3}x^3 + \binom{6}{4}x^4 + \binom{6}{5}x^5 + \binom{6}{6}x^6$ [দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে]

$= 1.1 + 6x + \frac{6.5}{1.2}x^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}x^3 + \frac{6.5.4.3}{4.3.2.1}x^4 + \frac{6.5.4.3.2}{5.4.3.2.1} + 1.x^6$

$= 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে,

$A = \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^8$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$A = \binom{8}{0}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^0 + \binom{8}{1}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^1 + \binom{8}{2}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^2 + \binom{8}{3}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^3 + ...$

$= 1 + 8.\left(-\frac{x^2}{4}\right) + 28.\frac{x^4}{16} + 56.\frac{-x^6}{64} + ...$

বা, $A = 1 - 2x^2 + \frac{7x^4}{4} - \frac{7}{8}x^6 + ...$

$= 1 - 2x^2 + 0.x^3 + \frac{7}{4}x^4 - \frac{7}{8}x^6 + ...$

আবার A এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 0 এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$

(দেখানো হলো)

গ. দেওয়া আছে, $C = (1 - x)$

এবং $B = (1 + ax)^6$

$\therefore C \times B = (1 - x)(1 + ax)^6$

$= (1 - x)(1 + 6ax + 15a^2x^2 + ...)$

$= 1 + 6ax + 15a^2x^2 - x - 6ax^2 - 15a^2x^3 ....$

$= 1 - x + 6ax + 15a^2x^2 - 6ax^2 - 15a^2x^3 ....$

প্রশ্নমতে, $1 - x + 6ax + 15a^2x^2 - 6ax^2 = 1 + bx^2$

বা, $-x + 6ax + 15a^2x^2 - 6ax^2 = 1 + bx^2 - 1$

বা, $-x + 6ax + 15a^2x^2 - 6ax^2 = bx^2$

বা, $(-1 + 6a)x + (15a^2 - 6a)x^2 = bx^2 + 0.x$

উভয়পক্ষ হতে x ও x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$-1 + 6a = 0$ এবং $15a^2 - 6a = b$

বা, $6a = 1$ বা, $b = 15\times\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 6\times\frac{1}{6}$

বা, $a = \frac{1}{6}$ $= \frac{15}{36} - 1 = \frac{-21}{36} = \frac{-7}{12}$

নির্ণেয় মান $a = \frac{1}{6}$ এবং $b = \frac{-7}{12}$

প্রশ্ন–১২ ▸ $a = 2 - x$, $b = \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^8$

ক. b এর মধ্যপদ কত? ২

খ. ab কে x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে x^4 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ৪

গ. 'খ' নং হতে প্রাপ্ত ফলাফল ব্যবহার করে $1{\cdot}9 \times (1{\cdot}05)^8$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $b = \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^8$

এখানে, b এর ঘাত, n = 8

$\therefore$ b এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ $= \left(\frac{n}{2} + 1\right)$ তম পদ

$= \left(\frac{8}{2} + 1\right)$ তম পদ

$= (4 + 1)$ তম পদ

$= 5$ তম পদ

$\therefore$ 5 বা $(4 + 1)$ তম পদ

$^8C_4 \cdot 1^4 \left(\frac{1}{2}x\right)^{8-4} = {^8C_4} \left(\frac{1}{2}x\right)^4$

$= 70\,\frac{1}{16}x^4 = \frac{35}{8}x^4$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $a = 2 - x$

এবং $b = \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^8$

$\therefore ab = (2 - x)\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^8$

দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে পাই,

$(2 - x)\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^8$

$= (2-x)\left[\binom{8}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^0 + \binom{8}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^1 + \binom{8}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{8}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \binom{8}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \ldots\right]$

$= (2 - x)\left[1 \cdot 1 + \frac{8}{1}\cdot\frac{x}{2} + \frac{8.7}{1.2}\cdot\frac{x^2}{4} + \frac{8.7.6}{1.2.3}\cdot\frac{x^3}{8} + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\cdot\frac{x^4}{16} + \ldots\right]$

$= (2 - x)(1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + \frac{35}{8}x^4 + \ldots\ldots]$

$= \left(2 + 8x + 14x^2 + 14x^3 + \frac{35}{4}x^4 + \ldots\ldots\right) +$

$(- x - 4x^2 - 7x^3 - 7x^4 - \frac{35}{8}x^5 - \ldots\ldots)$

$= 2 + 7x + 10x^2 + 7x^3 + \frac{7}{4}x^4 + \ldots\ldots$

$\therefore (2 - x)\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^8 = 2 + 7x + 10x^2 + 7x^3 + \frac{7}{4}x^4 + \ldots$ **(Ans.)**

গ. 'খ' এ প্রাপ্ত x^4 পর্যন্ত বিস্তৃতিতে $x = 0.1$ বসিয়ে পাই,

$(2 - 0{\cdot}1)\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^8 = 2 + 7(\cdot1) + 10(\cdot1)^2 + 7(\cdot1)^3 + \frac{7}{4}(\cdot1)^4$

বা, $1{\cdot}9 \times (1{\cdot}05)^8 = 2 + .7 + 10 \times (\cdot01) + 7 \times (\cdot001) + \frac{7}{4} \times (\cdot0001)$

বা, $1{\cdot}9 \times (1{\cdot}05)^8 = 2 + \cdot7 + 0{\cdot}1 + 0{\cdot}007 + 0{\cdot}000025$

বা, $1{\cdot}9 \times (1{\cdot}05)^8 = 2{\cdot}807025$

$\therefore 1{\cdot}9 \times (1{\cdot}05)^8 = 2{\cdot}8070$ (চার দশমিক পর্যন্ত) **(Ans.)**

সৃজনশীল প্রশ্নব্যাংক উত্তরসহ

প্রশ্ন–১৩ ▸ $(1 - 3x)^5$ একটি দ্বিপদী রাশি।

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে $(1 + y)^n$ কে বিস্তৃত কর। ২

খ. প্রদত্ত উদ্দীপককে পঞ্চম পদ পর্যন্ত বিস্তৃত করলে x^4 এর সহগ কত হবে? ৪

গ. উদ্দীপককে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত করলে যদি $a + bx^2 + cx^3$ পাওয়া যায় তবে a, b ও c এর মান নির্ণয় কর। ৪

উত্তর :

ক. $(1 + y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{1.2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.\,3}y^3 + \ldots + y^n$

খ. 405

গ. $a = 1, b = 90, c = -270$

প্রশ্ন–১৪ ▸ $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতির দ্বিপদী সূত্রটি নিম্নরূপ :

$(1 + y)^n = 1 + \binom{n}{1}y + \binom{n}{2}y + \binom{n}{2}y^2 + \ldots\ldots + y^n.$

ক. $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতির সূত্রটি লেখ। ২

খ. সূত্রটি থেকে $(1 + 3x)^5$ কে বিস্তৃত কর। ৪

গ. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে $(1 - 3x)^5$ কে বিস্তৃত কর এবং 'খ' ও 'গ' থেকে দেখাও যে, উভয়ের বিস্তৃতি একই শুধু চিহ্ন আলাদা। ৪

উত্তর :

ক. $(1 + x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$

খ. $1 + 15x + 90x^2 + 270x^3 + 405x^4 + 243x^5$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৫ ▸ প্যাসকেলের ত্রিভুজ :

1
1 1
1 2 1
1 x 3 1
1 y z 4 1

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে x, y, z এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্যাসকেলের ত্রিভজের পরবর্তী কয়েকটি ধাপ প্রয়োজনমতো পূরণ করে $(1 + t)^8$ কে বিস্তৃত কর। ৪

গ. দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে $(1 + t)^8$ এর বিস্তৃত করে 'খ' এর সত্যতা যাচাই কর। ৪

উত্তর :

ক. $x = 3, y = 4, z = 6.$

খ. $(1 + t)^8 = 1 + 8t + 28t^2 + 56t^3 + 70t^4 + 56t^5 + 28t^6 + 8t^7 + t^8.$

প্রশ্ন–১৬ ▸ $(x + y)^n$ কে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাধারণ আকার বলা হয়।

ক. $(x + y)^n$ এবং $(1 + y)^n$ –এর বিস্তৃতি দুইটি লেখ। ২

খ. 'ক' হতে $\left(p - \frac{x}{2}\right)^6$ –এর বিস্তৃতিটি নির্ণয় কর। ৪

গ. p = 1 হলে 'খ' এর দ্বিপদীটির বিস্তৃতি নির্ণয় কর। প্রাপ্ত বিস্তৃতি থেকে $(.995)^6$ –এর মান নির্ণয় কর। ৪

উত্তর :

ক. $(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + y^n$ এবং $(1 + y)^n = 1 + \binom{n}{1}y + \binom{n}{2}y^2 + \ldots + y^n.$

খ. $p^6 - 3p^5x + \frac{15}{4}p^4x^2 - \frac{5}{2}p^3x^3 + \frac{15}{16}p^2x^4 - \frac{3}{16}px^5 + \frac{x^6}{64}.$

গ. $1 - 3x + \frac{15}{4}x^2 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{15}{16}x^4 - \frac{3}{16}x^5 + \frac{x^6}{64}$ এবং $(.995)^6 = 0.970$

প্রশ্ন–১৭ ▸ A = $(1 + mx)^n$ একটি দ্বিপদী রাশি।

ক. m = 4 এবং n = 5 হলে প্যাসকলের সূত্রের সাহায্যে A এর বিস্তৃত কর। ২

খ. n = 8, m = 3 হলে A কে চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ৪

গ. n = 6, m = 4 হলে A কে দ্বিপদী উপপাদ্যের বিস্তৃত কর। ৪

উত্তর : ক. $(1 + 4x)^5 = 1 + 20x + 160x^2 + 640x^3 + 1280x^4 + 1024x^5$

খ. $(1 + 3x)^8 = 1 + 24x + 252x^2 + 1512x^3 + \ldots$

গ. $(1 + 4x)^6 = 1 + 24x + 240x^2 + \ldots$

অনুশীলনী ১০.২

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

■ **দ্বিপদী $(x + y)^n$ এর বিস্তৃতি :**

$(x + y)^n$ এর বিস্তৃতি সাধারণভাবে দ্বিপদী উপপাদ্য নামে পরিচিত।

আমরা জানি,

$(1 + y)^n = 1 + \binom{n}{1} y + \binom{n}{2} y^2 + \binom{n}{3} y^3 + ... + \binom{n}{r} y^r + ... \binom{n}{n} y^n$

এখন, $(x + y)^n = \left[x\left(1 + \frac{y}{x}\right)\right]^n = x^n\left(1 + \frac{y}{x}\right)^n$

$\therefore (x + y)^n = x^n\left[1 + {}^nc_1\left(\frac{y}{x}\right) + {}^nc_2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + {}^nc_3\left(\frac{y}{x}\right)^3 + ... {}^nc_n\left(\frac{y}{x}\right)^n\right]$

$= \left[x^n + {}^nc_1\left(\frac{y}{x}x^n\right) + {}^nc_2\left(\frac{y^2}{x^2}x^n\right) + {}^nc_3\frac{y^3}{x^3}.x^n + ... + x^n\frac{y^n}{x^n}\right]$

$\therefore (x + y)^n = (x^n + {}^nc_1\, yx^{n-1} + {}^nc_2\, y^2x^{n-2} + {}^nc_3y^3.x^{n-3} + ...y^n)$

মনে রাখতে হবে,

$n! = n(n - 1)(n - 2)(n - 3) .... 3.2.1$

$\binom{n}{r} = {}^nc_r,\ {}^nc_n = 1$

$\binom{n}{r} = {}^nc_r = \frac{n!}{r!\,(n - r)!},\ \binom{n}{0} = {}^nc_0 = 1$

$\binom{n}{n} = {}^nc_n = 1,\ 0! = 1.$

ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য, দ্বিপদী বিস্তৃতি $(1 + y)^n$ এর সাধারণ পদ বা r তম পদ.

$T_{r+1} = \binom{n}{r}y^r$ বা ${}^nc_ry^r$

এবং $(x + y)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ

বা, r–তম পদ $T_{r+1} = \binom{n}{r}x^{n-r}y^r$ বা ${}^nc_rx^{n-r}y^r$.

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

১. i. ${}^8C_0 = {}^8C_8$

ii. $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2) .....(n-r+1)}{r!}$

iii. $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে দ্বিতীয় পদটি $= \frac{n(n-1)}{2!}x^2$

নিচের কোনটি সঠিক?

● i　ⓑ ii ও iii　ⓖ i ও iii　ⓓ i, ii ও iii

২. **$(a + x)^n$-এর বিস্তৃতিতে $(n + 1)$ সংখ্যক পদ রয়েছে। এখানে n একটি –**

● অঋণাত্মক রাশি　ⓑ ধনাত্মক রাশি

ⓖ ঋণাত্মক রাশি　ⓓ ভগ্নাংশ

৩. $(x + y)^5$ –এর বিস্তৃতিতে দ্বিপদী সহগগুলো হলো :

ⓐ 5, 10,10, 5　● 1, 5,10,10, 5,1

ⓖ 10, 5, 5,10　ⓓ 1, 2, 3, 3, 2,1

৪. **$(1 - x)\left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$ -এর বিস্তৃতিতে x-এর সহগ –**

ⓐ –1　ⓑ $\frac{1}{2}$　● 3　ⓓ $-\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা : $(1 - x)\left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$

$= (1-x)\left\{\binom{8}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^0 + \binom{8}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^1 + \ldots\ldots\ldots\right\}$

$= (1-x)(1.1 + 8.\frac{x}{2} + \ldots\ldots\ldots)$

$= (1-x)(1 + 4x + \ldots\ldots\ldots)$

$= (1 - x + 4x - 4x^2 + \ldots\ldots\ldots)$

$= (1 + 3x - 4x^2 + \ldots\ldots\ldots)$

$\therefore$ x এর সহগ 3.

৫. $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^4$ **-এর বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদ কত?**

ⓚ 4 ● 6 ⓖ 8 ⓘ 0

৬. $(2-x)(1+ax)^5$ **কে** x^2 **পর্যন্ত বিস্তৃত করলে যদি** $2 + 9x + cx^2$ **পাওয়া যায়, তবে a ও c এর মান–**

● a = 1, c = 15 ⓛ a = 5, c = 15
ⓖ a = 15, c = 1 ⓘ a = 1, c = 0

নিচের তথ্যের আলোকে ৭ ও ৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ **হলে–**

৭. $^nC_0$ **= কত?**

ⓚ 0 ● 1 ⓖ n ⓘ নির্ণয় করা যায় না

ব্যাখ্যা : $^nC_0 = \frac{n!}{0! \times (n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1$

৮. **n = r = 100 হলে,** ^nC_r **এর মান–**

ⓚ 0 ● 1 ⓖ 100 ⓘ 200

ব্যাখ্যা : n = r = 100 হলে $^nC_r = {}^{100}C_{100} = \frac{100!}{100!(100-100)!}$

$= \frac{100!}{100! \times 0!} = \frac{1}{0!} = 1$

৯. $(x+y)^4$ **বিস্তৃতির সহগগুলো সাজালে আমরা পাই–**

ⓚ
4
1 4 1
1 5 5 1
1 6 10 6 1

●
1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

ⓖ
2
2 3 2
1 5 5 2
2 7 10 7 2

ⓘ
6
6 12 6
6 18 18 6
6 24 36 24 6

ব্যাখ্যা : $(x+y)^4$ বিস্তৃতির সহগগুলো সাজালে পাই,

$(x+y)^0$	1
$(x+y)^1$	$x + y$
$(x+y)^2$	$x^2 + 2xy + y^2$
$(x+y)^3$	$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
$(x+y)^4$	$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

প্রশ্ন ॥ ১০ ॥ নিম্নোক্ত প্রতিটি ক্ষেত্রে বিস্তৃত কর :

(a) $(2 + x^2)^5$; **(b)** $\left(2 - \frac{1}{2x}\right)^6$

সমাধান : (a) দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$(2 + x^2)^5$

$= 2^5 + \binom{5}{1}2^4.x^2 + \binom{5}{2}2^3.(x^2)^2 + \binom{5}{3}2^2.(x^2)^3 + \binom{5}{4}2^1.(x^2)^4 + (x^2)^5$

$= 32 + \frac{5}{1}16x^2 + \frac{5.4}{1.2}8.x^4 + \frac{5.4.3}{1.2.3}4x^6 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}2x^8 + x^{10}$

$= 32 + 80x^2 + 80x^4 + 40x^6 + 10x^8 + x^{10}$ **(Ans.)**

(b) দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$\left(2 - \frac{1}{2x}\right)^6$

$= 2^6 + \binom{6}{1}2^5\left(-\frac{1}{2x}\right) + \binom{6}{2}2^4\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 + \binom{6}{3}2^3$

$\left(-\frac{1}{2x}\right)^3 + \binom{6}{4}2^2\left(-\frac{1}{2x}\right)^4 + \binom{6}{5}2.\left(-\frac{1}{2x}\right)^5 + \left(-\frac{1}{2x}\right)^6$

$= 26 + \frac{6}{1}32\left(-\frac{1}{2x}\right) + \frac{6.5}{1.2}16.\frac{1}{4x^2} + \frac{6.5.4}{1.2.3}8\left(-\frac{1}{8x^3}\right)$

$+ \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}4.\frac{1}{16x^4} + \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}2\left(-\frac{1}{32x^5}\right) + \frac{1}{64x^6}$

$= 64 - \frac{96}{x} + \frac{60}{x^2} - \frac{20}{x^3} + \frac{15}{4x^4} - \frac{3}{8x^5} + \frac{1}{64x^6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১১ ॥ নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহের প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর।

(a) $(2 + 3x)^6$; **(b)** $\left(4 - \frac{1}{2x}\right)^5$

সমাধান : (a) দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$(2 + 3x)^6 = 2^6 + \binom{6}{1}.2^5.(3x) + \binom{6}{2}.2^4.(3x)^2$

$+ \binom{6}{3}.2^3.(3x)^3 + \ldots\ldots$ [চার পদ পর্যন্ত]

$= 64 + \frac{6}{1}.32.3x + \frac{6.5}{1.2}16.9x^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}8.27x^3 + \ldots.$

$= 64 + 576x + 2160x^2 + 4320x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

(b) দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$\left(4 - \frac{1}{2x}\right)^5 = 4^5 + \binom{5}{1}.4^4.\left(-\frac{1}{2x}\right) + \binom{5}{2}.4^3.\left(-\frac{1}{2x}\right)^2$

$+ \binom{5}{3}.4^2.\left(-\frac{1}{2x}\right)^3 + \ldots.$[চার পদ পর্যন্ত]

$= 1024 + \frac{5}{1}.256.\left(-\frac{1}{2x}\right) + \frac{5.4}{1.2}.64.\frac{1}{4x^2} + \frac{5.4.3}{1.2.3}16\left(-\frac{1}{8x^3}\right) + \ldots$

$= 1024 - \frac{640}{x} + \frac{160}{x^2} - \frac{20}{x^3} + \ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১২ ॥ $\left(p - \frac{1}{2}x\right)^6 = r - 96x + Sx^2 + \ldots\ldots\ldots$ **হলে, p এবং r এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান : দেওয়া আছে, $\left(p - \frac{1}{2}x\right)^6 = r - 96x + Sx^2 + \ldots$(i)

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে,

$\left(p - \frac{1}{2}x\right)^6 = p^6 + \binom{6}{1}.p^5.\left(-\frac{1}{2}x\right) + \binom{6}{2}.p^4.\left(-\frac{1}{2}x\right)^2 + \ldots..$

বা, $\left(p - \frac{1}{2}x\right)^6 = p^6 - \frac{6}{1}p^5\frac{1}{2}x + \frac{6.5}{1.2}p^4\frac{1}{4}x^2 + \ldots\ldots$

বা, $\left(p - \frac{1}{2}x\right)^6 = p^6 - 3p^5x + \frac{15}{4}p^4x^2 + \ldots\ldots$ ....(ii)

(i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$r = p^6$ ....(iii)

$96 = 3p^5$ .... (iv)

$s = \frac{15}{4}p^4$ .... (v)

(iv) হতে পাই, $3p^5 = 96$

বা, $p^5 = \frac{96}{3}$

বা, $p^5 = 32$

বা, $p^5 = 2^5$

$\therefore p = 2$

p = 2 হলে, (iii) হতে পাই,

$r = 2^6$

$\therefore r = 64$

আবার, P = 2 হলে, (v) নং হতে পাই,

$$s = \frac{15}{4} \times 2^4 = \frac{15}{4} \times 16 = 60$$

$\therefore$ p = 2, r = 64 এবং s = 60 **(Ans)**

বি. দ্র. Text বইয়ে – 96x এর পরিবর্তে – 196x হয়েছে।

প্রশ্ন ॥ ১৩ ॥ $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$ এর বিস্তৃতির x^3 এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান : দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^8 = 1 + {}^8C_1\frac{x}{2} + {}^8C_2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + {}^8C_3\left(\frac{x}{2}\right)^3 + {}^8C_4\left(\frac{x}{2}\right)^4 + ...$$

$$= 1 + \frac{8}{1}\cdot\frac{x}{2} + \frac{8.7}{1.2}\cdot\frac{x^2}{4} + \frac{8.7.6}{1.2.3}\cdot\frac{x^3}{8} + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\cdot\frac{x^4}{16} + ...$$

$$= 1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + \frac{35}{8}x^4 + ...$$

$\therefore \left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 7. (**Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৪ ॥ x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে $\left(2 + \frac{x}{4}\right)^6$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। উহার সাহায্যে $(1.9975)^6$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান : দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(2 + \frac{x}{4}\right)^6 = 2^6 + {}^6C_1.2^5.\left(\frac{x}{4}\right) + {}^6C_2.2^4.\left(\frac{x}{4}\right)^2 + {}^6C_3.2^3.\left(\frac{x}{4}\right)^3 + ...$$

$$= 64 + \frac{6}{1}.32.\frac{x}{4} + \frac{6.5}{1.2}.16.\frac{x^2}{16} + \frac{6.5.4}{1.2.3}.8.\frac{x^3}{64} + ...$$

$$= 64 + 48x + 15x^2 + \frac{5}{2}x^3 + ...$$

নির্ণেয় বিস্তৃতি $\left(2 + \frac{x}{4}\right)^6 = 64 + 48x + 15x^2 + \frac{5}{2}x^3 + ...$

এখানে, $2 + \frac{x}{4} = 1.9975$

বা, $\frac{x}{4} = 1.9975 - 2$

বা, $\frac{x}{4} = -0.0025$

$\therefore x = -0.01$

সুতরাং $\left(2 + \frac{-0.01}{4}\right)^6$

$= 64 + 48(-0.01) + 15(-0.01)^2 + \frac{5}{2}(-0.01)^3 + ...$ [x এর মান বসিয়ে]

বা, $(2 - 0.0025)^6 = 64 - 0.48 + 0.0015 - \frac{5}{2}\times 0.000001 + ...$

বা, $(1.9975)^6 = 63.5215$ [চার দশমিক স্থান পর্যন্ত] **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৫ ॥ দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে $(1.99)^5$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান : দ্বিপদী উপপাদ্য অনুসারে আমরা পাই,

$(1.99)^5 = (2 - 0.01)^5$

$$= (2 - 0.01)^5 = 2^5 + \binom{5}{1}.2^4.(-0\cdot01) + \binom{5}{2}.2^3.(-0\cdot01)^2 + \binom{5}{3}.2^2.(-0\cdot01)^3 + \binom{5}{4}.2.(-0\cdot01)^4 + (-0\cdot01)^5$$

$$= 32 + 5\cdot16.(-0\cdot01) + \frac{5\cdot4}{1\cdot2}.8.(0\cdot0001) + \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}4(-0\cdot000001) + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}.2\ (0\cdot00000001) + (-0\cdot0000000001)$$

বা, $(1.99)^5 = 32 - 0.8 + 0.008 - 0.00004 + 0.0000001 - 0.0000000001$

$\therefore (1.99)^5 = 31\cdot2079601 = 31.2080$ [চার দশমিক স্থান পর্যন্ত]

(Ans.)

বিকল্প পদ্ধতি :

দ্বিপদী উপপাদ্য অনুসারে আমরা পাই,

$$(2 + x)^5 = 2^5 + {}^5C_1.2^4.x^1 + {}^5C_2.2^3.x^2 + {}^5C_3.2^2.x^3 + {}^5C_4.2^1.x^4 + x^5$$

$$= 32 + \frac{5}{1}.16.x + \frac{5.4}{1.2}.8x^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3}4.x^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}.2.x^4 + x^5$$

$$= 32 + 80x + 80x^2 + 40x^3 + 10x^4 + x^5$$

এখানে, $2 + x = 1.99$

বা, $x = -0.01$

$$\therefore (2 - 0.01)^5 = 32 + 80(-0.01) + 80(-0.01)^2 + 40(-0.01)^3 + 10(-0.01)^4 + (-0.01)^5$$

বা, $(1.99)^5 = 32 - 0.8 + 0.008 - 0.00004 + 0.0000001 - 0.0000000001$

$\therefore (1.99)^5 = 31.2080$ [চার দশমিক স্থান পর্যন্ত] **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৬ ॥ $\left(1 + \frac{x}{4}\right)^n$ এর বিস্তৃতির তৃতীয় পদের সহগ চতুর্থ পদের সহগের দ্বিগুণ। n এর মান নির্ণয় কর। বিস্তৃতির পদসংখ্যা ও মধ্যপদ নির্ণয় কর।

সমাধান : দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(1 + \frac{x}{4}\right)^n = \binom{n}{0}\left(\frac{x}{4}\right)^0 + \binom{n}{1}\left(\frac{x}{4}\right)^1 + \binom{n}{2}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^3$$

শর্তমতে, $\binom{n}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2 \times \binom{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3$

বা, $\binom{n}{2} = 2 \times \binom{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)$

বা, $\frac{n(n-1)}{2!} = 2 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \times \frac{1}{4}$

বা, $\frac{n(n-1)}{1.2} = 2 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} \times \frac{1}{4}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{n-2}{12}$

বা, $2(n - 2) = 12$

বা, $2n - 4 = 12$

বা, $2n = 12 + 4 = 16$

বা, $n = \frac{16}{2}$

$\therefore n = 8$

n = 8 হলে, বিস্তৃতির পদ সংখ্যা 8 + 1 = 9, যা বিজোড় সংখ্যা। সুতরাং এর মধ্যপদ হবে একটি। অর্থাৎ $\left(\frac{8}{2} + 1\right)$ বা, (4 + 1) তম পদই মধ্যপদ।

আমরা জানি,

$(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদ = ${}^nC_r(1)^{n-r}.\ x^r$

$\therefore$ (4 + 1) তম পদ = ${}^8C_4(1)^{8-4}\left(\frac{1}{4}\right)^4$

$$= \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$$

$= 70 \times \frac{1}{256}$

$= \frac{70}{256}$

$= \frac{35}{128}$

$\therefore$ n = 8, পদসংখ্যা 9 এবং মধ্যপদ $\frac{35}{128}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৭ ॥ (a) $\left(k - \frac{x}{3}\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ 560 হলে x এর মান নির্ণয় কর।

(b) $\left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 160 হলে k এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : (a) দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(k - \frac{x}{3}\right)^7 = k^7 + {}^7C_1 k^6\left(-\frac{x}{3}\right) + {}^7C_2\, k^5\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + {}^7C_3\, k^4\left(-\frac{x}{3}\right)^3 + {}^7C_4\, k^3\left(-\frac{x}{3}\right)^4 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= k^7 + \frac{7}{1}k^6\left(-\frac{x}{3}\right) + \frac{7.6}{1.2}k^5\frac{x^2}{9} + \frac{7.6.5}{1.2.3}k^4\left(-\frac{x^3}{27}\right) + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}k^3\left(\frac{x^4}{81}\right) + \ldots\ldots$$

$$= k^7 - \frac{7}{3}k^6x + \frac{7}{3}k^5x^2 - \frac{35}{27}k^4x^3 + \frac{35}{81}k^3x^4 \ldots\ldots\ldots$$

এখানে, $\left(k - \frac{x}{3}\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ $\frac{35}{81}x^4$

প্রশ্নমতে, $\frac{35}{81}x^4 = 560$

বা, $x^4 = \frac{560 \times 81}{35}$

বা, $x^4 = 1296$

বা, $x^2 = 36$

$\therefore x = \pm 6$ **(Ans.)**

(b) দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^6 = (x^2)^6 + {}^6C_1(x^2)^5\left(\frac{k}{x}\right) + {}^6C_2(x^2)^4\left(\frac{k}{x}\right)^2 + {}^6C_3(x^2)^3\left(\frac{k}{x}\right)^3 + {}^6C_4(x^2)^2\left(\frac{k}{x}\right)^4 + \ldots\ldots$$

$$= x^{12} + \frac{6}{1}x^{10}\frac{k}{x} + \frac{6.5}{1.2}x^8\frac{k^2}{x^2} + \frac{6.5.4}{1.2.3}x^6\frac{k^3}{x^3} + \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}x^4\frac{k^4}{x^4} + \ldots\ldots$$

$$= x^{12} + 6kx^9 + 15k^2x^6 + 20k^3x^3 + 15k^4 + \ldots\ldots$$

এখানে, $\left(x^2 + \frac{k}{x}\right)$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ $20k^3$

প্রশ্নমতে, $20k^3 = 160$

বা, $k^3 = \frac{160}{20}$

বা, $k^3 = 8$

$\therefore k = 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৮ ॥ দেওয়া আছে,

$P = (a + bx)^6$ ....(i)

$Q = (b + ax)^5$ ....(ii)

$R = (a + x)^n$ ....(iii)

ক. (iii) এর বিস্তৃতিটি লেখ এবং সূত্রটি প্রয়োগ করে (i) এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

খ. যদি (i) এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের অনুপাত যথাক্রমে (ii) এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের অনুপাতের সমান হয় তবে দেখাও যে, $a : b = \sqrt{5} : 2$। উপরিউক্ত উক্তির স্বপক্ষে একটি উদাহরণ দাও।

গ. দেখাও যে, (ii) এর বিস্তৃতির জোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলোর যোগফলের বিজোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলোর যোগফলের সমান। তুমি এমন একটি দ্বিপদী রাশি উলেখ কর, যার ক্ষেত্রেও উপরিউক্ত বিষয়টি সত্য হয়।

সমাধান :

ক. দেওয়া আছে, $P = (a + bx)^6$ ....(i)

$R = (a + x)^n$ ....(iii)

(iii) নং বিস্তৃতিটি নিম্নরূপ :

$R = (a + x)^n$

$= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}x^3 + \ldots\ldots + x^n$ ....(iv)

$P = (a + bx)^6$

$$= a^6 + \binom{6}{1}a^{6-1}(bx) + \binom{6}{2}a^{6-2}(bx)^2 + \binom{6}{3}a^{6-3}(bx)^3 + \binom{6}{4}a^{6-4}(bx)^4 + \binom{6}{5}a^{6-5}(bx)^5 + (bx)^6$$

$$= a^6 + \binom{6}{1}a^5bx + \binom{6}{2}a^4b^2x^2 + \binom{6}{3}a^3b^3x^3 + \binom{6}{4}a^2b^4x^4 + \binom{6}{5}ab^5x^5 + b^6x^6$$ **(Ans.)**

(খ) 'ক' হতে পাই, (i) এর বিস্তৃতি

$$P = (a + bx)^6 = a^6 + \binom{6}{1}a^5bx + \binom{6}{2}a^4b^2x^2 + \binom{6}{3}a^3b^3x^3 + \binom{6}{4}a^2b^4x^4 + \binom{6}{5}ab^5x^5 + b^6x^6$$

আবার, (ii) এর বিস্তৃতি

$Q = (b + ax)^5$

$$= b^5 + \binom{5}{1}b^{5-1}ax + \binom{5}{2}b^{5-2}(ax)^2 + \binom{5}{3}b^{5-3}(ax)^3 + \binom{5}{4}b^{5-4}(ax)^4 + \binom{5}{5}b^{5-5}(ax)^5$$

$$= b^5 + \binom{5}{1}b^4ax + \binom{5}{2}b^3a^2x^2 + \binom{5}{3}b^2a^3x^3 + \binom{5}{4}ba^4x^4 + a^5b^5$$

শর্তমতে,

$$\frac{\binom{6}{1}a^5bx}{\binom{6}{2}a^4b^2x^2} = \frac{\binom{5}{1}b^4ax}{\binom{5}{2}b^3a^2x^2}$$

বা, $\frac{6a^5bx}{\frac{6.5}{1.2}a^4b^2x^2} = \frac{5ab^4x}{10a^2b^3x^2}$

বা, $\frac{6a^5bx}{15a^4b^2x^2} = \frac{5ab^4x}{10a^2b^3x^2}$

বা, $\frac{2a}{5bx} = \frac{b}{2ax}$

বা, $4a^2x = 5b^2x$

বা, $4a^2 = 5b^2$

বা, $\frac{a^2}{b^2} = \frac{5}{4}$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ a : b = $\sqrt{5}$: 2 ....(i) **[দেখানো হলো]**

উদাহরণ : $(b + ax)^8$ এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ যথাক্রমে $\binom{8}{1} b^7ax$ ও $\binom{8}{2} b^6a^2x^2$ এবং $(a + bx)^9$ এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ যথাক্রমে $\binom{9}{1} a^8bx$ ও $\binom{9}{2} a^7b^2x^2$

শর্তানুসারে, $\frac{\binom{9}{1}a^8bx}{\binom{9}{2} a^7b^2x^2} = \frac{\binom{8}{1}b^7ax}{\binom{8}{2} b^6a^2x^2}$

বা, $\frac{9a^8bx}{\frac{9.8}{1.2}a^7b^2x^2} = \frac{8ab^7x}{\frac{8.7}{1.2}a^2b^6x^2}$

বা, $\frac{9a^8bx}{36a^7b^2x^2} = \frac{8ab^7x}{28a^2b^6x^2}$

বা, $\frac{a}{4bx} = \frac{2b}{7ax}$

বা, $7a^2x = 8b^2x$

বা, $7a^2 = 8b^2$

বা, $\frac{a^2}{b^2} = \frac{8}{7}$

বা, $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{8}{7}}$

$\therefore$ a : b = $\sqrt{8} : \sqrt{7}$ ....(2)

(1) হতে পাই a : b = $\sqrt{5} : \sqrt{4} = \sqrt{6-1} : \sqrt{5-1}$

(2) হতে পাই a : b = $\sqrt{8} : \sqrt{7} = \sqrt{9-1} : \sqrt{8-1}$

সুতরাং উপরিউক্ত উক্তির স্বপক্ষে $(a + bx)^9$ ও $(b + ax)^8$ একটি উদাহরণ।

গ. 'খ' হতে পাই,

$Q = (b + ax)^5$

$= b^5 + \binom{5}{1} b^4ax + \binom{5}{2} b^3a^2x^2 + \binom{5}{3} b^2a^3x^3 + \binom{5}{4} ba^4x^4 + a^5x^5$

এখন জোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকসমূহের যোগফল

$= \binom{5}{1} + \binom{5}{3} + 1$

$= \frac{5}{1} + \frac{5.4.3}{1.2.3} + 1$

$= 5 + 10 + 1$

$= 16$

এবং বিজোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলোর যোগফল

$= 1 + \binom{5}{2} + \binom{5}{4}$

$= 1 + \frac{5.4}{1.2} + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}$

$= 1 + 10 + 5$

$= 16$

সুতরাং (ii) এর বিস্তৃতির জোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলোর যোগফল বিজোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলোর যোগফলের সমান। **(দেখানো হলো)**

উদাহরণ : দ্বিপদী রাশি $(x + y)^7$ এর বিস্তৃতি

$(x + y)^7$

$= x^7 + \binom{7}{1} x^6y + \binom{7}{2} x^5y^2 + \binom{7}{3} x^4y^3 + \binom{7}{4} x^3y^4 + \binom{7}{5} x^2y^5 + \binom{7}{6} xy^6 + y^7$

$\therefore$ জোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলোর যোগফল

$= \binom{7}{1} + \binom{7}{3} + \binom{7}{5} + 1$

$= 7 + \frac{7.6.5}{1.2.3} + \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5} + 1$

$= 64$

এবং বিজোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলোর যোগফল

$= 1 + \binom{7}{2} + \binom{7}{4} + \binom{7}{6}$

$= 1 + \frac{7.6}{1.2} + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} + \frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6}$

$= 64$

$\therefore$ জোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলোর যোগফল = বিজোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলোর যোগফল।

সুতরাং উপরিউক্ত বিষয়টি সত্য। **(প্রমাণিত)**

গুরুত্বপূর্ণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১. $^6C_3$ = কত?

ক 9 খ 18 ● 20 ঘ 120

২. $(a + 2b)^5$ এর বিস্তৃতিতে a^3b^2 এর সহগ কত?

● 40 খ 20 গ 10 ঘ 5

৩. $(1 - 3x)^5$ –এর বিস্তৃতিতে x^4 এর সহগ কত?

ক – 405 খ – 270 গ 243 ● 405

৪. $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান কত?

● 1 খ 6 গ 7 ঘ 12

৫. $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^4$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ কত?

ক 1 খ 4 ● 6 ঘ 12

৬. $\left(2x^2 - \frac{1}{2x^2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে কততম পদ x মুক্ত?

ক 2 খ 3 ● 4 ঘ 5

৭. $\underline{|6}$ = কত?

ক 260 খ –620 গ –720 ● 720

৮. $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতির–

i. পদসংখ্যা 11

ii. মধ্যপদের সংখ্যা 2

iii. তৃতীয় পদের সহগ 45

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii ● i ও iii ঘ i, ii ও iii

৯. i. $(a + bx)^n$ বিস্তারিত মধ্যপদ একটি হলে n জোড় সংখ্যা

ii. $(a + bx)^n$ বিস্তৃতির x^3 এর সহগ $^nC_3a^{n+3}(bx)^3$

iii. $\binom{10}{4}$ এর মান 210

নিচের কোনটি সঠিক?

● i ও iii   ⓑ i ও ii   ⓖ ii ও iii   ⓓ i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে ১০ ও ১১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

x ও y চলক দুটিকে যোগ করে 8 মাত্রার একটি দ্বিপদী রাশিতে বিস্তৃত করা হলো।

১০. বিস্তৃতিতে কতগুলো পদ পাওয়া যাবে?

ⓚ 4   ⓑ 8   ● 9   ⓓ 10

১১. $y = \frac{1}{x}$ হলে কততম পদ চলক মুক্ত পদ হবে?

ⓚ 10   ● 5   ⓖ 4   ⓓ 1

১০.২ : দ্বিপদী $(x + y)^n$ এর বিস্তৃতি

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১২. T_{r+1} এই সংকেত দ্বারা কততম পদ বুঝায়? (সহজ)

ⓚ r   ● r + 1   ⓖ r – 1   ⓓ r + 2

১৩. $^6C_4$ = কত? (সহজ)

● 15   ⓑ 10   ⓖ 5   ⓓ 2

১৪. 10_{C_2} = কত? (সহজ)

ⓚ 20   ● 45   ⓖ 48   ⓓ 50

১৫. দ্বিপদী উপপাদ্যের সাধারণ আকার কোনটি? (সহজ)

ⓚ $(1 + y)^n$ ⓑ $(1 + x)^n$ ⓖ $(1 + xy)^n$ ● $(x + y)^n$

১৬. $(x + y)^8$ এর শেষ পদের মান 256 হলে y এর মান কত? (মধ্যম)

ⓚ –2   ⓑ 0   ● 2   ⓓ 8

১৭. $(x – y)^5$ এর প্রতি পদে x ও y এর যোগফল কত? (মধ্যম)

ⓚ –5   ⓑ 0   ● 5   ⓓ 10

১৮. $(1 + x)\left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ কত? (কঠিন)

ⓚ –5   ● 5   ⓖ 8   ⓓ 16

১৯. $(2 – x^2)^5$, x^4এর সহগ কত? (মধ্যম)

ⓚ –80   ⓑ 60   ⓖ 70   ● 80

২০. $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^4$ এর মধ্যপদটির সহগ কত? (মধ্যম)

ⓚ 0   ⓑ 4   ● 6   ⓓ 8

২১. $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ কত? (সহজ)

● $^nC_ry^r$ ⓑ $^nC_{r+1}y^n$ ⓖ $^nC_{ry}y$ ⓓ $^nC_ny^n$

২২. $(1 – 3x)^4$ এর বিস্তৃতির সহগগুলো হলো– (কঠিন)

ⓚ 1 2 1   ⓑ 1 3 3 1
● 1 – 12 54 –108 8 1   ⓓ 1 1

২৩. $\left(x + \frac{2y}{x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^8 এর সহগ কত? (কঠিন)

● $3360y^4$ ⓑ 3369   ⓖ $3469y^3$ ⓓ $3129y^4$

২৪. $\left(1 – \frac{1}{x}\right)^{10}$ এর 7 তম পদ কত? (মধ্যম)

● $\frac{210}{x^6}$ ⓑ $210x^6$ ⓖ 210   ⓓ $\frac{x^6}{210}$

২৫. $\left(3x^2 – \frac{1}{3x}\right)^5$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ $–\frac{0}{4}$ ● $–\frac{10}{3}$ ⓖ $–\frac{5}{4}$ ⓓ $–\frac{10}{9}$

২৬. $\left(x^2 + \frac{3a}{x}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ কত? (সহজ)

ⓚ $^{13}C_r\, 3^ra^r\, x^{30 – 3r}$ ⓑ $^{15}C_r3^ra^rx^{32–4r}$
● $^{15}C_r3^ra^rx^{30–3r}$ ⓓ $^{15}C_r4^ra^rx^{31–3r}$

২৭. $\left(1 – \frac{x^2}{4}\right)^3$ বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ কত? (সহজ)

● 0   ⓑ 1   ⓖ 5   ⓓ 10

২৮. $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^2$ এর বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদ কোনটি? (কঠিন)

● 15   ⓑ 20   ⓖ 10   ⓓ 17

২৯. 4! = কোনটি ? (সহজ)

● 4(4 –1)(4 –2)(4 – 3)   ⓑ 4(4 – 1)
ⓖ 4(4 – 2)(4 – 1)   ⓓ (4 – 3)(4 –1)

৩০. 0! = কত? (মধ্যম)

ⓚ 0   ⓑ $\frac{0}{2}$ ● 1   ⓓ 2

৩১. $(x + y)^n$ এর rতম পদ কোনটি? (সহজ)

● $^nC_{r–1}\, x^{n – r}\, y^r$ ⓑ $^nC_2y^{r–1}$ ⓖ ^nC_n ⓓ $^nC_ry^r$

৩২. $\left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 160 হলে k = ? (কঠিন)

ⓚ 6   ● 2   ⓖ 3   ⓓ 9

৩৩. $(a + x)^n$, n জোড় হলে বিস্তৃতিতে মধ্যপদ কয়টি? (সহজ)

ⓚ 0   ● 1   ⓖ 3   ⓓ 2

৩৪. $\left(x – \frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ কয়টি? (সহজ)

● 1   ⓑ 3   ⓖ 0   ⓓ 2

৩৫. $\left(3x – \frac{1}{2x}\right)^{10}$ এর মধ্যপদ কততম? (সহজ)

ⓚ 5   ⓑ 10   ⓖ 8   ● 6

৩৬. $(2 + 3x)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ কত? (কঠিন)

ⓚ 3420   ● 4320   ⓖ 1250   ⓓ 0.289

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৩৭. i. $(1 – x)^5$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ 10.
ii. $(3 + 2x)^5$ এর বিস্তৃতিতে x^4 এর সহগ 720
iii. $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতি (n + 1) সংখ্যক পদ আছে

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii   ⓑ i ও iii   ⓖ ii ও iii   ● i, ii ও iii

৩৮. i. n! = n(n –1)(n – 2)(n – 3)
ii. n = r = 100 হলে ^nC_r এর মান 1
iii. $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতিতে (n + 1) সংখ্যক পদ আছে

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii   ⓑ i ও iii   ● ii ও iii   ⓓ i, ii ও iii

৩৯. i. $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতির r তম পদের সহগ $^nC_{r–1}$
ii. বিস্তৃতির সহগ নির্ণয়ের কৌশল প্রথম ব্যবহার করেন প্যাসকেল
iii. বিস্তৃতির ঘাত ও পদসংখ্যা সমান

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও ii

৪০. $(a + x)^n$
i. n এর মান জোড় হলে মধ্যপদ দুইটি
ii. n এর মান বিজোড় হলে মধ্যপদ দুইটি
iii. সাধারণ পদ $^nC_r a^{n-r}.x^r$
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ● ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

৪১. $(x - x^{-1})^{17}$
i. মধ্যপদ হবে 9 তম পদ
ii. মধ্যপদ হবে 9 ও 10 তম পদ
iii. মধ্যপদের মান $\frac{17!}{8!9!}x$ ও $\frac{-17!}{8!9!}x^{-1}$
নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)
ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ● ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

৪২. i. O! = 1
ii. 1! = 1
iii. $a^0 = 1$
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের তথ্যের আলোকে ৪৩ – ৪৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$(x + y)^n$ এর বিস্তৃতির–

৪৩. সর্বশেষ পদে x এর ঘাত কত? (সহজ)
ⓚ y^n ● 0 ⓖ 1 ⓘ n + 1

৪৪. n = 6 হলে ২য় পদে y এর সহগ কত? (মধ্যম)
ⓚ $^6C_2x^2$ ⓚ $^6C_9x^4$ ● $^6C_1x^5$ ⓘ $^6C_3x^4$

৪৫. প্রথম পদে y এর ঘাত কত? (সহজ)
ⓚ 1 ⓚ 2 ⓖ n + 1 ● 0

নিচের তথ্যের আলোকে ৪৬ – ৪৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$(1 + y)^8$ এর বিস্তৃতির

৪৬. y^5 এর সহগ নিচের কোনটি? (মধ্যম)
ⓚ 35 ⓚ 28 ● 56 ⓘ 70

৪৭. y, y^3, y^5 এর সহগগুলোর যোগফল কত? (মধ্যম)
ⓚ 231 ⓚ 129 ⓖ 123 ● 120

৪৮. y = 0.1 হলে $(1 + y)^8$ এর মান কত? (কঠিন)
ⓚ 2.501 ⓚ 2.008 ● 2.144 ⓘ 2.96

নিচের তথ্যের আলোকে ৪৯ – ৫১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$$\left(3x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8$$

৪৯. বিস্তৃতিতে কয়টি মধ্যপদ আছে? (সহজ)
● 1 ⓚ 2 ⓖ 3 ⓘ 5

৫০. কততম পদ মধ্যপদ হবে? (মধ্যম)
ⓚ 6 ⓚ 4 ● 5 ⓘ 0

৫১. মধ্যপদের মান কত? (কঠিন)
ⓚ $^8C_5\left(\frac{3}{2}\right)^5x^5$ ● $^8C_4\left(\frac{3}{2}\right)^4x^4$
ⓖ $^8C_2\left(\frac{2}{2}\right)^2x^2$ ⓘ $^8C_5\left(\frac{3}{2}\right)x^x$

১০·৩ : n! এবং ^nC_r এর মান নির্ণয়

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৫২. ^nC_r = কত? (সহজ)
● $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ ⓚ $\frac{n!:}{n!:(r! - r)}$ ⓖ $\frac{r!}{r!(m! - r)}$ ⓘ $\frac{1}{r!(1 - n!)}$

৫৩. $n_{c_{r+1}}$ = নিচের কোনটি? (সহজ)
ⓚ $\frac{n!}{r!(r+1)!}$ ⓚ $\frac{n!}{n!(r+1)!}$
ⓖ $\frac{n!}{(r+1)!}$ ● $\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}$

৫৪. $^8C_5$ এর মান কত? (সহজ)
● $\frac{8.!}{5!3!}$ ⓚ $\frac{8!}{3!2!}$ ⓖ $\frac{7!}{5!2!}$ ⓘ $\frac{8!}{1!5!}$

৫৫. $^nC_5 = {}^nC_7$ হলে $^nC_{11}$এর মান কোনটি? (কঠিন)
ⓚ 10 ● 12 ⓖ 14 ⓘ 15

৫৬. ^nC_n এর মান কত? (সহজ)
ⓚ 0 ⓚ n ● 1 ⓘ n + 1

৫৭. $^nC_1$ = কত? (সহজ)
● n ⓚ 1 ⓖ 2 ⓘ n + 9

৫৮. $^nC_2$ = কত? (সহজ)
ⓚ $\frac{n-1}{2!}$ ⓚ $\frac{n(n-1)}{2}$ ● $\frac{n(n-1)}{2!}$ ⓘ $\frac{n}{1}$

৫৯. $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^{10}$ এর বিস্তারে মধ্যপদ নিচের কোনটি? (মধ্যম)
ⓚ $^{10}C_r$ ⓚ $^{10}C_{51}$ ● $^{10}C_5$ ⓘ $^{10}C_2$

৬০. $(1 + x)(1 - x)^5$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ কত? (মধ্যম)
ⓚ 4 ⓚ – 8 ⓖ 2 ● – 4

৬১. $(b + y)^n$ এর বিস্তৃতিতে n একটি – (সহজ)
● ধনাত্মক ⓚ ঋণাত্মক ⓖ শূন্য ⓘ নিরপেক্ষ

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৬২. i. $^nC_0 = 1.{}^nC_n = 1$
ii. n! = n(n – 1)(n – 2) 3, 2, 1
iii. $(1 + 4x)^n$ এর বিস্তৃতিতে তৃতীয় পদটি = $^nC_2(4x)^2$
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

৬৩. i. $^5C_0 = {}^5C_5$
ii. $^nC_1 = n$
iii. $^6C_0 = 0$
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
● i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

৬৪. i. $^7C_4 = 35$
ii. $^6C_4 = 24$
iii. $^8C_2 = 28$
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓚ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

৬৫. i. $^5C_0 = 1$
ii. $^5C_n = n$
iii. 0! = 1

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

৬৬. i. $(1 + 0.99)^5$
ii. $(1.99 \times 1)^5$
iii. $(2 - 0.1)^5$
কোনটি $(a + x)^n$ আকারের? (কঠিন)

ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

৬৭. i. $\left(x^4 + \frac{1}{x^3}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x^{11} এর সহগ – 56

ii. $\left(x - \frac{x}{2}\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ 168

iii. $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^0 এর সহগ n

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i , ii ও iii

৬৮. i. ${}^nC_x = {}^nC_y$ হলে x + y = n হবে

ii. ${}^nC_x = {}^nC_y$ হলে x = y হবে

iii. $(a + x)^n$ এ (r + 1) তম পদ ${}^nC_r\, a^{n-r}$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i , ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৭৬. $(1 + y)^8$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদের সহগ কোনটি?

ⓚ ${}^8C_{r+1}$ ● ${}^8C_r$ ⓖ ${}^8C_{r-1}$ ⓘ ${}^9C_r$

৭৭. ${}^nC_2$ = কত?

ⓚ $\frac{x-1}{21}$ ⓚ $\frac{x(x-1)(x-2)}{31}$ ● $\frac{n(n-1)}{1.2}$ ⓘ n(n – 1)

৭৮. ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ হলে–

n = r = 10 হলে ${}^nC_r$ এর মান কত?

ⓚ 0 ⓚ 10 ● 1 ⓘ 100

৭৯. $(2x + y)^5$ এর বিস্তৃতিতে কততম পদটি x মুক্ত পদ?

ⓚ ১ম ⓚ ৩য় ⓖ ৫ম ● ৬ষ্ঠ

৮০. $(1 + x)\left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ কত?

ⓚ – 5 ● 5 ⓖ 8 ⓘ 16

৮১. $\left(a + \frac{1}{a}\right)^{18}$ এর বিস্তৃতিতে a^0 এর সহগ কত?

● 48620 ⓚ 38620 ⓖ 48640 ⓘ 38640

৮২. $(2x + 3y)^5$ এর বিস্তৃতিতে প্রতি পদে x ও y এর ঘাতের যোগফল কত?

ⓚ 6 ● 5 ⓖ 4 ⓘ 10

৮৩. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর–

i. n! = n(n – 1)(n – 2) ....3·2·1

ii. ${}^nC_2 = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

iii. ${}^nC_r = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৮৯. $(1 + 5x)^{2n}$ যেখানে n ∈ n এর বিস্তৃতিতে–

i. সর্বদা জোড় সংখ্যক পদ পাওয়া যাবে

নিচের তথ্যের আলোকে ৬৯ ও ৭০নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ হলে,

৬৯. ${}^{12}C_6 + {}^{12}C_3 = {}^{n+1}C_r$ এর মান কত? (কঠিন)

● 715 ⓚ 1930 ⓖ 1896 ⓘ 1860

৭০. n = 16, r = 13 হলে ${}^nC_{r-1}$ = কত? (কঠিন)

ⓚ 1967 ⓚ 302 ● 1820 ⓘ 709

নিচের তথ্যের আলোকে ৭১ – ৭৩নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ হলে–

৭১. ${}^nC_1$ = কত? (সহজ)

ⓚ 0 ⓚ 1 ● n ⓘ n + 1

৭২. n = 10r = 5 হলে ${}^nC_r$ এর মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ 0 ● 252 ⓖ 100 ⓘ 20

৭৩. n = r = 0 হলে ${}^nC_r$ এর মান কত? (মধ্যম)

ⓚ 2 ⓚ 12 ⓖ 3 ● 1

নিচের তথ্যের আলোকে ৭৪ ও ৭৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতির।

৭৪. n একটি– (সহজ)

● ধনাত্মক ⓚ ঋণাত্মক ⓖ ভগ্নাংশ ⓘ পূর্ণ রাশি

৭৫. y = .25 ও n = 2 হলে $(1 + y)^n$ = ? (মধ্যম)

ⓚ 1.30 ⓚ 1.96 ● 1.56 ⓘ 2.15

ⓚ i ⓚ ii ও iii ● i ও ii ⓘ i, ii ও iii

৮৪. i. ${}^5C_0 = {}^5C_5$

ii. $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে n একটি ঋণাত্মক রাশি

iii. ${}^nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \ \lfloor n-r}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓚ ii ও iii ● i ও iii ⓘ i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে ৮৫ ও ৮৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$\left(x + \frac{2}{x}\right)^n$ যেখানে n জোড় সংখ্যা।

৮৫. (r + 1) তম পদ x বর্জিত হলে r এর মান কত?

ⓚ 0 ● $\frac{n}{2}$ ⓖ n ⓘ 2n

৮৬. x বর্জিত পদটির মান কোনটি?

ⓚ ${}^nC_n 2^{\frac{n}{2}}$ ⓚ ${}^nC_{\frac{n}{2}} 2^n$ ⓖ ${}^nC_n 2^n$ ● ${}^nC_{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}}$

নিচের তথ্যের আলোকে ৮৭ ও ৮৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$\left(5x - \frac{1}{5x}\right)^{16}$

৮৭. দ্বিপদী রাশিটির বিস্তৃতিতে কয়টি পদ পাওয়া যাবে?

ⓚ 8 ⓚ 15 ⓖ 16 ● 17

৮৮. বিস্তৃতির কত তম পদ চলকমুক্ত হবে?

ⓚ 1 ⓚ 8 ● 9 ⓘ 16

ii. সমমাত্রিক বহুপদী পাওয়া যাবে

iii. সর্বদা বিজোড় সংখ্যক পদ পাওয়া যাবে

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ● iii ⓖ i ও ii ⓘ i, ii ও iii

৯০. $\left(n+\frac{1}{x^2}\right)$ এর বিস্তৃতিতে–

i. পদের সংখ্যা 7টি

ii. x বর্জিত পদের মান 15

iii. x^3 এর সহগ 6

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓜ ii ও iii ● i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের তথ্যের আলোকে ৯১ – ৯৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

দ্বিপদী রাশি $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)$ এ n পূর্ণসংখ্যা।

৯১. রাশিটির বিস্তৃতিতে পদের সংখ্যা কত? (সহজ)

ⓚ n – 1 ⓛ n ● n + 1 ⓝ $\frac{n+1}{2}$

৯২. n = 6 হলে বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান কত? (মধ্যম)

ⓚ 6 ● 15 ⓜ 20 ⓝ 30

৯৩. n = 6 হলে রাশিটির বিস্তৃতিতে মধ্য পদের সংখ্যা সহগ কত? (কঠিন)

ⓚ 1 ⓛ 6 ⓜ 15 ● 20

নিচের তথ্যের আলোকে ৯৪–৯৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$(1+y)^n + 1 + ny + \frac{n(n-1)}{1.n} n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, n^3 + ... + y^n$

৯৪. উক্ত বিস্তৃতিতে n একটি– (সহজ)

● ধনাত্মক রাশি ⓛ ঋণাত্মক রাশি

ⓜ অঋণাত্মক রাশি ⓝ ভগ্নাংশ

৯৫. n = 4 হলে বিস্তৃতি হবে– (মধ্যম)

ⓚ $1 + 4y + 6y^2 + 6y^3 + y^4$ ● $1 + 4y + 6y^2 + 4y^3 + y^4$

ⓜ $1 + 6y + 4y^2 + 6y^3 + y^4$ ⓝ $1 + 4y + 4y^2 + 6y^3 + y^4$

৯৬. উক্ত বিস্তৃতিতে y = 0.25 ও n = 2 হলে, $(1 + y)^n$ = ? (কঠিন)

ⓚ 1·30 ⓛ 1·95

ⓜ 2·15 ● 1·56

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১ ▸ $(1 + p^2)^7$, $\left(y^2+\frac{k}{y}\right)^6$ দু'টি দ্বিপদী রাশি।

ক. ১ম দ্বিপদীটির পদসংখ্যা এবং শেষপদ নির্ণয় কর। ২

খ. ১ম দ্বিপদীটি বিস্তৃতি কর। ৪

গ. দ্বিতীয় রাশির বিস্তৃতিতে y^3-এর সহগ 160 হলে k-এর মান নির্ণয় কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. আমরা জানি, $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতিতে (n + 1) সংখ্যক পদ আছে।

সুতরাং, $(1 + p^2)^7$ এর বিস্তৃতিতে (7 + 1) বা, 8টি পদ আছে। **(Ans.)**

$(1 + p^2)^7$ দ্বিপদীটির শেষ পদ $= \binom{7}{7}(p^2)^7$

$= 1.p^{14} = p^{14}$ **(Ans.)**

খ. ১ম দ্বিপদীটিকে বিস্তৃতি করে,

$$(1 + p^2)^7 = \binom{7}{0}(p^2)^0 + \binom{7}{1}(p^2)^1 + \binom{7}{2}(p^2)^2 + \binom{7}{3}(p^2)^3 + \binom{7}{4}(p^2)^4 + \binom{7}{5}(p^2)^5 + \binom{7}{6}(p^2)^6 + \binom{7}{7}(p^2)^7$$

$$= 1.1 + \frac{7}{1}p^2 + \frac{7.6}{1.2}p^4 + \frac{7.6.5}{1.2.3}p^6 + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}p^8 + \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}p^{10} + \frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6}p^{12} + 1.p^{14}$$

$$= 1 + 7p^2 + 21p^4 + 35p^6 + 35p^8 + 21p^{10} + 7p^{12} + p^{14}$$ **(Ans.)**

গ. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(y^2+\frac{k}{y}\right)^6 = (y^2)^6 + \binom{6}{1}(y^2)^5\left(\frac{k}{y}\right) + \binom{6}{2}(y^2)^4\left(\frac{k}{y}\right)^2 + \binom{6}{3}(y^2)^3\left(\frac{k}{y}\right)^3 + \binom{6}{4}(y^2)^2\left(\frac{k}{y}\right)^4 + ...$$

$$= y^{12} + \binom{6}{1}y^{10}.\frac{k}{y} + \binom{6}{2}y^8.\frac{k^2}{y^2} + \binom{6}{3}y^6.\frac{k^3}{y^3} + \binom{6}{4}y^4.\frac{k^4}{y^4} + ...$$

$$= y^{12} + \binom{6}{1}ky^9 + \binom{6}{2}k^2y^6 + \binom{6}{3}k^3y^3 + \binom{6}{4}k^4 + ...$$

প্রশ্নানুসারে, $\binom{6}{3}k^3 = 160$

বা, $\frac{6.5.4}{1.2.3}k^3 = 160$

বা, $20k^3 = 160$

বা, $k^3 = 8$

$\therefore k = 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২ ▸ দুটি দ্বিপদা রাশি যথাক্রমে A = $\left(x+\frac{2}{x}\right)^8$ এবং B = $(1 + ax)^7$ যেখানে $a \neq 0$

ক. a = 1 হলে B এর বিস্তৃতিতে সহগগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. B এর বিস্তৃতিতে x^3 এবং x^4 সহগ পরস্পর সমান হলে a নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, A এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদের মান 1120। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$B = (1 + ax)^2$ $\therefore$ a = 1 হলে $B = (1 + x)^7$

n = 0	হলে	1
n = 1	”	1 1
n = 2	”	1 2 1
n = 3	”	1 3 3 1
n = 4	”	1 4 6 4 1
n = 5	”	1 5 10 10 5 1

n = 6 ” 1 6 15 20 15 6 1

n = 7 ” 1 7 21 35 35 21 7 1

সহগগুলোর সমষ্টি = $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128$

খ. দেওয়া আছে,

$B = (1 + ax)^7$

ধরি, $(1 + ax)^7$ এর বিস্তৃতিতে $r + 1$ তম পদে x^3 এবং x^4 আছে।

$r + 1$ তম পদ = ${}^7C_r(ax)^r = {}^7C_r a^r x^r$

যেহেতু ইহাতে x^3 এবং x^4 আছে। সেহেতু $r = 3$ অথবা $r = 4$

x^3 এর সহগ = ${}^7C_3a^3$

x^4 এর সহগ = ${}^7C_4a^4$

প্রশ্নমতে, ${}^7C_3a^3 = {}^7C_4a^4$

বা, ${}^7C_4a^4 = {}^7C_3a^3$

$\therefore a = 1$

গ. দেওয়া আছে, $A = \left(x + \frac{2}{x}\right)^8$

যেহেতু $\left(x + \frac{2}{x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে পদের সংখ্যা = 8 + 1 বা 9 যা বিজোড় সংখ্যা। অতএব মধ্যপদ হবে একটি।

অর্থাৎ মধ্যপদ হবে $\left(\frac{8}{2} + 1\right)$ বা 5-তম পদ।

$\therefore$ 5 তম পদ বা, $(4 + 1)$তম পদ = ${}^8C_4x^{8-4}\left(\frac{2}{x}\right)^4$

$= {}^8C_4x^4\frac{2^4}{x^4} = {}^8C_4 2^4$

$= 1120$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–৩ ▸ $\left(2 + \frac{x}{4}\right)^6$ এবং $\left(k - \frac{y}{4}\right)^5$ দুইটি দ্বিপদী রাশি।

ক. প্রথম দ্বিপদী রাশিকে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ২

খ. 'ক' এর সাহায্যে $(1.9975)^6$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। ৪

গ. দ্বিতীয় দ্বিপদী রাশিটির বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ 160 হলে, y এর মান নির্ণয় কর। ৪

▸◂ ৩ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $\left(2+\frac{x}{4}\right)^6 = 2^6 + {}^6C_1 2^{6-1}\left(\frac{x}{4}\right)^1 + {}^6C_2 2^{6-2}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + {}^6C_3 2^{6-3}\left(\frac{x}{4}\right)^3 ......$

$= 64 + 6.2^5\left(\frac{x}{4}\right)^1 + \frac{6.5}{1.2}.2^4\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}.2^3\left(\frac{x}{4}\right)^3 ......$

$= 64 + 48x + 15x^2 + 2.5x^3 + ...$ **(Ans.)**

খ. এখন, $2 + \frac{x}{4} = 1.9975$

বা, $\frac{x}{4} = 1.9975 - 2$

বা, $\frac{x}{4} = -0.0025$

$\therefore x = -0.01$

এখন $\left\{2 + \frac{(-0.01)}{4}\right\}^6 = 64 + 48(-–0.01) + 15(-0.01)^2 + 2.5(-0.01)^3$

$+ ....$ ['ক' হতে]

বা, $(1.9975)^6 = 64 - 0.48 + 0.0015 - 0.0000025 + ...$

$= 64.0015 - 0.4800025 + ...$

$= 63.5215$ [চার দশমিক স্থান পর্যন্ত] **(Ans.)**

গ. $\left(k - \frac{y}{4}\right)^5 = k^5 + {}^5C_1k^{5-1}\left(\frac{-y}{4}\right) + {}^5C_2k^{5-2}\left(\frac{-y}{4}\right)^2$

$+ {}^5C_3k^{5-3}\left(\frac{-y}{4}\right)^3 + {}^5C_4k^{5-4}\left(\frac{-y}{4}\right)^4 + ...$

$= k^5 + 5k^4\left(\frac{-y}{4}\right) + 10k^3\frac{y^2}{16} + 10k^2\left(\frac{-y^3}{64}\right)$

$+ 5k\frac{y^4}{256} + ...$

প্রশ্নমতে, $\frac{10y^2}{16} = 160$

বা, $y^2 = \frac{160 \times 16}{10}$

বা, $y^2 = 16 \times 16$

$\therefore y = \pm 16$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৪ ▸ $\left(k - \frac{x}{3}\right)^7$; $x \in IN$ একটি দ্বিপদী রাশি। এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ 560।

ক. রাশিটির বিস্তৃতির সকল পদ লেখ। ২

খ. x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর মান বসালে $\left(1 + \frac{k}{x}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে তৃতীয় পদের সহগ চতুর্থপদের সহগের দ্বিগুণ হলে n এর মান নির্ণয় কর। ৪

▸◂ ৪ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $\left(k - \frac{x}{3}\right)^7$; $x \in IN$

$\left(k - \frac{x}{3}\right)^7 = k^7 + \binom{7}{1}k^6\left(-\frac{x}{3}\right) + \binom{7}{2}k^5\left(-\frac{x}{3}\right)^2$

$+ \binom{7}{3}k^4\left(-\frac{x}{3}\right)^3 + \binom{7}{4}k^3\left(-\frac{x}{3}\right)^4 + \binom{7}{5}k^2$

$\left(-\frac{x}{3}\right)^5 + \binom{7}{6}k\left(-\frac{x}{3}\right)^6 + \left(-\frac{x}{3}\right)^7$

$= k^7 - \binom{7}{1}\frac{k^6x}{3} + \binom{7}{2}\frac{k^5x^2}{3^2} + \binom{7}{3}\frac{k^4x^3}{3^3}$

$+ \binom{7}{4}\frac{k^3x^4}{3^4} + \binom{7}{5}\frac{k^2x^5}{3^5} + \binom{7}{6}\frac{kx^6}{3^6} - \frac{x^7}{3^7}$

খ. 'ক' হতে পাই,

k^3 এর সহগ = $\binom{7}{4}\frac{x^4}{3^4}$

প্রশ্নানুসারে, $\binom{7}{4}\frac{x^4}{3^4} = 560$

বা, $\frac{35}{81}x^4 = 560$

বা, $x^4 = 1296$

$\therefore x = 6$ [$\because x \in IN$] **(Ans.)**

গ. x = 6 বসালে $\left(1 + \frac{k}{x}\right)^n = \left(1 + \frac{k}{6}\right)^n$

$\left(1 + \frac{k}{6}\right)^n$ এর বিস্তৃতি ৩য় পদ = ${}^nC_2\left(\frac{k}{6}\right)^2$

এবং চতুর্থ পদ ${}^nC_3\left(\frac{k}{6}\right)^3$

শর্তমতে, ${}^nC_2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = {}^nC_3\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 2$

বা, $\frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{1}{6^2} = \frac{n!}{3!(n-3)!}\frac{1}{6^3}$

বা, $\frac{1}{2!(n-2)(n-3)!} = \frac{2}{3!(n-3)!}\cdot\frac{1}{6}$

বা, $\frac{1}{2(n-2)} = \frac{2}{6\times 6}$

বা, $4(n-2) = 36$

বা, $n-2 = 9$

বা, $n = 11$

$\therefore n = 11$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৫ ▸ $P = \left(2+\frac{x}{2}\right)^8$ ....(i)

$Q = (a+bx)$ ....(ii)

$R = (b-ax)^8$ ....(iii)

ক. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে (ii) নং এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $a = b = 1$ হলে, QR এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমানুসারে (i) নং কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর এবং উহার সাহায্যে $(1\cdot995)^8$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। ৪

▸◂ ৫নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে (ii)নং এর বিস্তৃতি :

$Q = (a+bx)^7$

$= \binom{7}{0}a^7(bx)^0 + \binom{7}{1}a^6(bx)^1 + \binom{7}{2}a^5(bx)^2 + \binom{7}{3}a^4(bx)^3 + \binom{7}{4}a^3(bx)^4 + \binom{7}{5}a^2(bx)^5 + \binom{7}{6}a^1(bx)^6 + \binom{7}{7}a^0(bx)^7$

$= a^7 + \binom{7}{1}a^6bx + \binom{7}{2}a^5b^2x^2 + \binom{7}{3}a^4b^3x^3 + \binom{7}{4}a^3b^4x^4 + \binom{7}{5}a^2b^5x^5 + \binom{7}{6}a^1b^6x^6 + b^7x^7$

খ. দেওয়া আছে, $Q = (a+bx)^7$

এবং $R = (b+ax)^8$

এখন $a = b = 1$ হলে,

$\therefore Q = (1+x)^7$

এবং $R = (1-x)^8$

এখন $QR = (1-x)^7(1-x)^8$

$= (1+x)^7(1-x)^7(1-x)$

$= (1-x^2)^7(1-x)$

$= \left[1+\binom{7}{1}(-x^2)+\binom{7}{2}(-x^2)^2+\binom{7}{3}(-x^2)^3+\binom{7}{4}(-x^2)^4+\binom{7}{5}(-x^2)^5+\binom{7}{6}(-x^2)^6+\binom{7}{7}(-x^2)^7\right](1-x)$

$= \left[1-7x^2+\frac{7.6}{1.2}x^4+\frac{7.6.5}{1.2.3}(-x^6)+\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}x^8+\ldots\ldots\right](1-x)$

$= (1-7x^2+21x^4-35x^6+35x^8+\ldots\ldots)(1-x)$

$= 1-7x^2+21x^4-35x^6+35x^8-x+7x^3-21x^5+35x^7-35x^9+\ldots\ldots$

$\therefore$ QR এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ 35।

গ. দেওয়া আছে,

(i) নং থেকে, $P = \left(2+\frac{x}{2}\right)^8$

$= \binom{8}{0}2^8\left(\frac{x}{2}\right)^0+\binom{8}{1}2^7\left(\frac{x}{2}\right)^1+\binom{8}{2}2^6\left(\frac{x}{2}\right)^2+\binom{8}{3}2^5\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots$

$= 256+512x+\frac{8.7.64x^2}{1.2.4}+\frac{8.7.6.32x^3}{1.2^2.3.4}$

$= 256+512x+448x^2+224x^3+\ldots\ldots$

মনে করি,

$\left(2+\frac{x}{2}\right)^8 = (1.995)^8$

বা, $2+\frac{x}{2} = 1.995$

বা, $\frac{x}{2} = -0.005$

$\therefore x = -0.01$

এখন, (i) নং এর বিস্তৃতিতে $x = -0.01$ বসিয়ে পাই,

$\left[2+\left(\frac{-0.01}{2}\right)\right]^8 = 256+512(-0.01)+448(-0.01)^2+224(-0.01)^3+\ldots\ldots$

বা, $(2-0.005)^8 = 256-5.12+0.0448-0.000224+\ldots$

বা, $(1.995)^8 = 250.924576$

≈ 250.9246

অতএব নির্ণেয় মান 250.9246 (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত)

প্রশ্ন–৬ ▸ যদি (i) $\left(2x+\frac{a}{x^3}\right)^{10}$ (ii) $(a+3x)^n$ দুইটি বীজগণিতীয় রাশি।

ক. (ii) এর বিস্তৃতির প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর। ২

খ. (i) এর বিস্তৃতির x^{10} ও x^{-20} এর সহগ সমান হলে দেখাও যে, $a = 2$ ৪

গ. (ii) এর বিস্তৃতির প্রথম তিনটি পদের মান যথাক্রমে P, $\frac{21}{2}$ px ও 189 qx^2 হলে p ও q এর মান নির্ণয় কর। ৪

▸◂ ৬ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $\left(2x^2+\frac{a}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতি $= (2x^2)^{10} + {}^{10}C_1(2x^2)^9\left(\frac{a}{x^3}\right) + {}^{10}C_2(2x^2)^8\left(\frac{a}{x^3}\right)^2 + {}^{10}C_3(2x^2)^7\left(\frac{a}{x^3}\right)^3 + \ldots\ldots$

$= 2^{10}x^{10} + 10.2^9x^{18}\frac{a}{x^3} + \frac{10\times 9}{2.1}.2^8x^{16}\frac{a^2}{x^6} + \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}2^7x^{14}\frac{a^3}{x^9} + \ldots\ldots$

$= 1024x^{20} + 5120x^{15}a + 11520a^2x^{10} + 15360a^3x^5 + \ldots\ldots$

$\left(2x^2+\frac{a}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতির ১ম চারটি পদ হলো,

$1024x^{20}$, $5120x^{15}a$, $11520a^2x^{10}$ এবং $15360a^3x^5$

খ. 'ক' থেকে পাই, x^{10} এর সহগ $= 11520a^2$

ধরি, উক্ত বিস্তৃতির $(r+1)$ তম পদে x^{-20} বিদ্যমান।

$\therefore T_{r+1} = {}^{10}C_r(2x^2)^{10-r}\left(\frac{a}{x^3}\right)^r = {}^{10}C_r2^{10-r}.x^{20-2r}.a^r.x^{-3r}$

$= {}^{10}C_r2^{10-r}.a^r.x^{20-2r-3r}$

প্রশ্নানুযায়ী,

$20-2r-3r = -20$

বা, $20-5r = -20$

বা, $20+20 = 5r$

বা, $40 = 5r$

$\therefore r = 8$

অতএব, $(r+1)$ বা, $(8+1)$ বা, 9তম পদে x^{-20} আছে।

$\therefore$ 9তম পদের সহগ $= {}^{10}C_8 2^{10-8}a^8$

$= {}^{10}C_{10-8}2^2a^8$

$= {}^{10}C_2 4a^8$

$= \frac{10\times 9}{2}\times 4.a^8$

$= 180a^8$

যেহেতু x^{10} ও x^{-20} এর সহগ সমান

সেহেতু, $180a^8 = 11520a^2$

বা, $a^8 = \frac{11520a^2}{180}$

বা, $a^6 = 64 = 2^6$

$\therefore a = 2$ **(দেখানো হলো)**

গ. 'খ' থেকে পাই, $a = 2$

$\therefore$ (ii) রাশিটি হলো $(2 + 3x)^n$

$\therefore (2 + 3x)^n$ এর বিস্তৃতি $= 2^n + n.2^{n-1}.3x + \frac{n(n-1)}{2}. 2^{n-2}(3x)^2 + ...$

$= 2^n + 2^{n-1}.3nx + \frac{9n(n-1)}{2} 2^{n-2}.x^2 + ...$

শর্তানুযায়ী, $p = 2^n$ ....(i)

$\frac{21}{2}px = 2^{n-1}.x^2$.............................(ii)

এবং $189qx^2 = \frac{9(n-1)n}{2}. 2^{n-2}x^2$ .... (iii)

(i) নং হতে পাই, $\frac{3.7px}{2} = 3nx.2^{n-1}$

প্রশ্ন–৭ ▸ $(p + 2x)^n$ একটি দ্বিপদী রাশি।

ক. রাশিটির x^{n-3} এর সহগ কত? ২

খ. $(p + 2x)^5$ কে বিস্তৃতি কর। ৪

গ. উক্ত বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 320 হলে P এর মান কত? ৪

▸◂ ৭ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $(p + 2x)^n$ এর বিস্তৃতিতে r তম পদ $^nC_{r-1} P^{n-r}(2x)^{r-1}$

$\therefore n-2$ তম পদ $= {}^nC_{n-3} P^{n-(n-2)}(2x)^{n-3}$

$= {}^nC_{n-3} P^{n-n+2} 2^{n-3} x^{n-3}$

$= {}^nC_{n-3} P^2 2^{n-3} x^{n-3}$

$\therefore x^{n-3}$ এর সহগ $^nC_{n-3} P^2 2^{n-3}$

খ. $(p + 2x)^5 = p^5 + {}^5C_1 P^{5-1}(2x) + {}^5C_2P^{5-2} (2x)^2 + {}^5C_3P^{5-3}(2x)^3 + {}^5C_4P^{5-4}(2x)^4 + {}^5C_5P^0(2x)^5$

$= P^5 + 10p^4x + 40p^3x^2 + 80p^2x^3 + 80px^4 + 32x^5$.

গ. 'খ' থেকে প্রাপ্ত x^3 এর সহগ $= 80p^2$

শর্তমতে $80p^2 = 320$

বা, $p^2 = \frac{320}{80}$

বা, $p^2 = 4$

$\therefore p = 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৮ ▸ $(b + 2x)^5$ একটি দ্বিপদী রাশি।

ক. $(b + 2x)^5$ কে দ্বিপদীর সাহায্যে বিস্তৃত কর। ২

খ. বিস্তৃতির প্রথম তিন পদ নির্ণয় কর। ৪

গ. x^3 এর সহগ 320 হলে b এর মান কত? ৪

▸◂ ৮ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $(b + 2x)^5$

$= b^5 + 5c_1b^42x + 5c_2b^3(2x)^2 + 5c_3b^2(2x)^3$

বা, $\frac{7p}{2} = n.2^{n-1}$

বা, $7p = n.2^{n-1}.2$

বা, $7p = n.2^n$

বা, $7p = n.2^n$

বা, $7.2^n = n.2^n$ [1 হতে পাই]

বা, $\frac{7.2^n}{2^n} = n$

$\therefore n = 7$

(i) নং হতে পাই, $p = 2^7 = 128$

(ii) নং হতে পাই, $189qx^2 = \frac{9n(n-1)}{2}.2^{n-2}.x^2$

বা, $q = \frac{9.7(7-1).2^{7-2}}{2 \times 189}$

বা, $q = \frac{9.7.6.2^5}{2 \times 189}$

বা, $q = \frac{378.2^5}{378}$

বা, $q = 2^5 = 32$

$\therefore q = 32$

অতএব p ও q এর নির্ণেয় মান যথাক্রমে 128 ও 32।

$+ 5c_4b(2x)^4 + 5c_5(2x)^5$.

খ. $(b + 2x)^5$

$= b^5 + 5c_1b^4(2x) + 5c_2b^3(2x)^2 + 5c_3b^2(2x)^3 + ...$

$= b^5 + 5b^4.2x + \frac{5!}{2!.3!}. b^3.4x^2 + \frac{5!}{3!.2!} b^28x^3 + ...$

$= b^5 + 10xb^4 + 40x^2b^3 + 80x^3b^2 + ...$

গ. 'খ' হতে পাই,

x^3 এর সহগ $= 80b^2$.

প্রশ্নমতে, $80b^2 = 320$

বা, $b^2 = 4$

$\therefore b = 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৯ ▸ $\left(2x^2 + \frac{1}{2x}\right)^n$

ক. n = 4 হলে দ্বিপদীটির তৃতীয় পদ কত? ২

খ. $\left(2x^2 + \frac{1}{2x}\right)^5$ কে প্রথম চার পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ৪

গ. দেখাও যে ধারাটির x বর্জিত পদ নেই। ৪

▸◂ ৯ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. আমরা জানি, $(a + x)^n$ এর r তম পদ $= {}^nC_{r-1} a^{n-r} x^{r-1}$.

$\therefore \left(2x^2 + \frac{1}{2x}\right)^4$ এর তৃতীয় পদ

$= {}^4C_2(2x^2)^{4-3}\left(\frac{1}{2x}\right)^2$

$= {}^4C_2\, 2x^2 . \frac{1}{4x^2}$

$= 6. \frac{1}{2} = 3$ **(Ans.)**

খ. $\left(2x^2 + \frac{1}{2x}\right)^5$

$= (2x^2)^5 + {}^5C_1(2x^2)^{5-1}\left(\frac{1}{2x}\right) + {}^5C_2(2x^2)^{5-2}\left(\frac{1}{2x}\right)^2$

$+ {}^5C_3(2x^2)^{5-3}\left(\frac{1}{2x}\right)^3 + ...$

$= 32x^{10} + 5(2x^2)^4.\frac{1}{2x} + \frac{80x^6}{4x^2} + \frac{40x^4}{8x^3} + ...$

$= 32x^{10} + 40x^7 + 20x^4 + 5x + ...$ **(Ans.)**

গ. মনে করি,

দ্বিপদীটির $(r + 1)$তম পদ $= x$ বর্জিত

$\therefore (r + 1)$তম পদ $= {}^5C_r(2x^2)^{5-r}\left(\frac{1}{2x}\right)^r$

$= {}^5C_r\, 2^{5-r}.\, x^{10-2r}.x^{-r}.2^{-r}.$

$= {}^5C_r 2^{5-2r} x^{10-3r}$

শর্তমতে, $10 - 3r = 0$

বা, $3r = 10$

$\therefore r = \frac{10}{3}$

$\therefore x$ বর্জিত পদ $= \frac{10}{3} + 1 = \frac{13}{3}$ যা অসম্ভব।

$\therefore$ বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ নেই। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১০ ▸ $\left(3x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8$

ক. রাশিতে কয়টি মধ্যপদ থাকবে এবং কেন? ২

খ. রাশিটির মধ্যপদ ও তার মান নির্ণয় কর। ৪

গ. রাশিটি থেকে $(r + 1)$ তম পদ নির্ণয় কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. উক্ত রাশিতে একটি মধ্যপদ থাকবে। এখানে ঘাত বা সূচক $n = 8$ একটি জোড় সংখ্যা হওয়ায় এর একটি মধ্যপদ থাকবে।

খ. এখানে, $n = 8$ জোড় সংখ্যা

$\therefore$ মধ্যপদটি $= \left(\frac{n}{2} + 1\right)$ তম পদ

$= \left(\frac{8}{2} + 1\right)$ তম পদ

$= (4 + 1)$ তম পদ

$= 5$ তম পদ

$\therefore$ 5তম পদ $= {}^8C_4(3x^2)^{8-4}\left(-\frac{1}{2x}\right)^4$

$= {}^8C_4 81x^8(-1)^4\, 2^{-4}.x^{-4}$

$= \frac{2835}{8}x^4$

গ. $(r + 1)$ তম পদ $= {}^8C_r(3x^2)^{8-r}\left(-\frac{1}{2x}\right)^r$

$= {}^8C_r\, 3^{8-r}.\, x^{16-2r}(-1)^r.\, 2^{-r}.x^{-r}$

$= (-1)^r.\, {}^8C_r\, 3^{8-r}, x^{16-3r}, 2^{-r}.$

প্রশ্ন–১১ ▸ $(1 + x)^7$.

ক. রাশিটির বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $(1 - x)^8(1 + x)^7$ এর বিস্তৃতি লেখ। ৪

গ. $(1 - x)^8(1 + x)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^3 ও x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$(1 + x)^7 = {}^7C_0x^0 + {}^7C_1x^1 + {}^7C_2x^2 + {}^7C_3x^3 + {}^7C_4x^4.$

$= 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + ...$ **(Ans.)**

খ. $(1 + x)^7(1 - x)^8 = (1 - x)^7(1 - x)(1 + x)^7$

$= (1-x)(1-x^2)^7 = (1-x)\{1+(-x^2)\}^7$

$= (1-x)\left[1 + {}^7C_1(-x^2) + {}^7C_2(-x^2)^2 + {}^7C_3(-x^2)^3 + {}^7C_4(-x^2)^4 + ...\right]$

$= (1- x)\ (1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + 35x^8 + ...1)$

$= (1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + 35x^8 + ...)$

$- (x - 7x^3 + 21x^5 - 35x^7 + 35x^9)$

$= 1 - x - 7x^2 + 7x^3 + 21x^4 - 21x^5 - 35x^6$

$+ 35x^7 + 35x^8 - 35x^9$ .... **(Ans.)**

গ. "খ" হতে পাই

$(1 - x)^8(1 + x)^7 = 1 - x - 7x^2 + 7x^3 + 21x^4$

$- 21x^5 - 35x^6 + 35x^7 + 35x^8 - 35x^9$ ....

$\therefore x^3$ এর সহগ $= 7$ এবং

x^7 এর সহগ $= 35.$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১২ ▸ $\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6$

ক. সাধারণ পদের মান কত? ২

খ. x বর্জিত পদ ও তার মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $(1 + x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে 21 ও 22তম পদ দুটি সমান হলে x এর মান কত? ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\left(x^2 - 2.x.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^6 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$

এর সাধারণ পদ $(r + 1) = {}^{12}C_r\, x^{12-r}\frac{(-1)^r}{x^r}$

$= (-1)^r.\, {}^{12}C_r x^{12-2r}.$ **(Ans.)**

খ. মনে করি, $(r + 1)$ তম পদটি x বর্জিত

'ক' থেকে $(r + 1)$ তম পদ $= (-1)^r.{}^{12}C_r x^{12-2r}$

শর্তমতে, $12 - 2r = 0$

বা, $2r = 12$

$\therefore r = 6$

$\therefore (6 + 1) = 7$ তম পদটি x বর্জিত, এর মান

$= (-1)^6\, {}^{12}C_6$

$= 924$ **(Ans.)**

গ. $(1 + x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে,

21 তম পদ $= {}^{44}C_{20}\, x^{20}$ ....(i)

22 তম পদ $= {}^{44}C_{21}\, x^{21}$ ....(ii)

শর্তমতে, ${}^{44}C_{20}\, x^{20} = {}^{44}C_{21}\, x^{21}$

বা, $\frac{44!}{20!\,24!} = \frac{44!}{21!\,23!}x$

বা, $\frac{1}{24} = \frac{x}{21}$

বা, $x = \frac{21}{24}$

$\therefore x = \frac{7}{8}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৩ ▸ $P = (1 + x)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^8$ ....(i)

$Q = \left(2x^2 - \frac{1}{2x^3}\right)^{10}$ **..........(ii)**

ক. (i) কে x^{-3} পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ২

খ. 'ক' থেকে প্রাপ্ত ফলাফল ব্যবহার করে $11 \times (1.1)^8$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. (ii) এর বিস্তৃতি থেকে x^0 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

▸◂ ১৩ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $(1 + x)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^8$

$= (1+x)\left[{}^8C_0\left(\frac{1}{x}\right)^0 + {}^8C_1\left(\frac{1}{x}\right)^1 + {}^8C_2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}^8C_3\left(\frac{1}{x}\right)^3 + {}^8C_4\left(\frac{1}{x}\right)^4 + ...\right]$

$= (1 + x)\left(1 + 8.\frac{1}{x} + 28.\frac{1}{x^2} + 56.\frac{1}{x^3} + 70.\frac{1}{x^4} + ...\right)$

$= \left(1 + \frac{8}{x} + \frac{28}{x^2} + \frac{56}{x^3} + ...\right) + \left(x + 8 + \frac{28}{x} + \frac{56}{x^2} + \frac{70}{x^3} + ...\right)$

$= \left(9 + x + \frac{36}{x} + \frac{84}{x^2} + \frac{126}{x^3} + ...\right)$ **(Ans.)**

খ. 'ক' হতে পাই, $\left(9 + x + \frac{36}{x} + \frac{84}{x^2} + \frac{126}{x^3} + ...\right)$

এখন $x = 10$ বসিয়ে পাই,

$(1 + 10) \times \left(1 + \frac{1}{10}\right)^8 = 9 + 10 + \frac{36}{10} + \frac{84}{(10)^2} + \frac{1026}{(10)^3} + ...$

বা, $11 \times (1 + .1)^8 = 19 + 3.6 + .84 + 1.026 +$

বা, $11 \times (1.1)^8 = 24.466$ **(Ans.)**

গ. মনে করি, $(r + 1)$ তম পদে x^0 এর সহগ বিদ্যমান।

$\therefore (r + 1)$ তম পদ $= {}^{10}C_r\,(2x^2)^{10-r}\left(-\frac{1}{2x^3}\right)^r$

$= {}^{10}C_r.\left(-\frac{1}{2}\right).\,2^{10-r}.\,x^{20-5r}$

শর্তমতে, $20 - 5r = 0$

বা, $r = \frac{20}{5}$

$\therefore r = 4$

$\therefore x^0$ এর সহগ ${}^{10}C_4\left(-\frac{1}{2}\right)^4.\,2^{10-4} = {}^{10}C_4.\frac{1}{2^4}.\,2^6$

$= 4 \times 210$

$= 840$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৪ ▸ $\mathbf{A = (2x + 3y)^5}$ **...................(i)**

$\mathbf{B = (1 + x)(a - bx)^{12}}$**..........(ii)**

$\mathbf{C = (2x - 3y)^5}$ **.....................(iii)**

ক. A এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. B এর বিস্তৃতিতে x^8 এর সহগ 0 হলে $\frac{a}{b}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে যদি $x = \frac{3}{2}$ এবং $y = \frac{2}{3}$ হয় তাহলে (iii) বিস্তৃতিটির বিজোড় পদগুলোর যোগফল, জোড় পদগুলোর যোগফল অপেক্ষা বেশি। ৪

▸◂ ১৪ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $(2x + 3y)^5$

$= (2x)^5 + {}^5C_1(2x)^4.\,3y + {}^5C_2(2x)^3(3y)^2$

$+ {}^5C_3(2x)^2(3y)^3 + {}^5C_4(2x)(3y)^4 + (3y)^5.$

$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$ **(Ans.)**

খ. $(1 + x)(a - bx)^{12}$

$= (1 + x)\{a^{12} + {}^{12}C_1a^{11}(-bx) + {}^{12}C_2a^{10}(-bx)^2$

$+ {}^{12}C_3a^9(-bx)^3 + {}^{12}C_4a^8(-bx)^4 + {}^{12}C_5a^7(-bx)^5$

$+ {}^{12}C_6a^6(-bx)^6 + {}^{12}C_7a^5(-bx)^7 + {}^{12}C_8a^4(-bx)^8 + ...\}$

$= \{a^{12} + {}^{12}C_1a^{11}(-bx) + {}^{12}C_2a^{10}(-bx)^2 + {}^{12}C_3a^9(-bx)^3$

$+ {}^{12}C_4a^8(-bx)^4 + {}^{12}C_5a^7(-bx)^5 + {}^{12}C_6a^6(-bx)^6 + {}^{12}C_7a^5(-bx)^7$

$+ {}^{12}C_8a^4(-bx)^8 + ...\}$

$= \{a^{12}x + {}^{12}C_1a^{11}(-bx^2) + {}^{12}C_2\,a^{10} + b^2x^3 - {}^{12}C_3\,a^9b^3x^4$

$+ {}^{12}C_4\,a^8b^4x^5 - {}^{12}C_5a^7b^5x^5 + {}^{12}C_6a^6b^6x^7 - {}^{12}C_7a^5b^7x^8 + ...\}$

x^8 এর সহগ $= {}^{12}C_8a^4b^8 - {}^{12}C_7a^5b^7.$

শর্তমতে, ${}^{12}C_8a^4b^8 - {}^{12}C_7a^5b^7 = 0$

বা, $\frac{{}^{12}C_8}{{}^{12}C_7} = \frac{a^5b^7}{a^4b^8}$

বা, $\frac{5}{8} = \frac{a}{b}$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{5}{8}$ **(Ans.)**

গ. $(2x - 3y)^5$

মনে করি

বিজোড় পদগুলোর যোগফল $= s_1$ এবং

জোড় পদগুলোর যোগফল $= s_2$

$(2x - 3y)^5 = s_1 - s_2$

বা, $s_1 - s_2 = \left(2.\frac{3}{2} - 3.\frac{2}{3}\right)^5$ $\left[\because x = \frac{3}{2}, y = \frac{2}{3}\right]$

$= (3 - 2)^5 = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৫ ▸ দুটি দ্বিপদী রাশি যথাক্রমে $\mathbf{M = \left(x + \frac{2}{x}\right)^8}$ **এবং** $\mathbf{N = (1 + ax)^2}$ **যেখানে** $\mathbf{a \neq 0}$**.**

ক. $a = 1$ হলে, N এর বিস্তৃতিতে সহগগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. N এর বিস্তৃতিতে x^3 এবং x^4 এর সহগ পরস্পর সমান হলে a এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, M এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদের মান 1120. ৪

▸◂ ১৫ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে,

$N = (1 + ax)^7$

$a = 1$ হলে, $N = (1 + x)^7$

$(1 + x)^7$ এর বিস্তৃতিতে সহগগুলোর সমষ্টি $= (1 + 1)^7$

$= 2^7 = 128$ **(Ans.)**

খ. $N = (1 + ax)^7$

$(1 + ax)^7$ এর বিস্তৃতিতে $= 1^7 + {}^7C_1.1^6ax + {}^7C_2.1^5(ax)^2$

$+ {}^7C_3.1^4(ax)^3 + {}^7C_4.1^5.(ax)^4 + ...$

$= 1 + 7ax + 21a^2x^2 + 35a^3x^3 + 35a^4x^4 + ...$

এখানে, x^3 এর সহগ $= 35a^3$

এবং x^4 এর সহগ $= 35a^4$

প্রশ্নমতে, $35a^4 = 35a^3$

$\therefore a = 1$

নির্ণেয় মান $a = 1$

গ. $M = \left(x + \frac{2}{x}\right)^8$

এখানে, M এর বিস্তৃতিতে $n = 8$ জোড় সংখ্যা

$\therefore \left(\frac{8}{2} + 1\right)$ তম বা $(4 + 1)$ তম পদ মধ্যপদ,

$\therefore (4 + 1)$ তম পদ $= {}^8C_4.(x)^{8-4}.\left(\frac{2}{x}\right)^4$

$= {}^8C_4.x^4\frac{2^4}{x^4}$

$= 2^4.\ {}^8C_4$

$= 16 \times 70$

$= 1120$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৬ ▸ $\left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^{10}$ একটি দ্বিপদী রাশি।

ক. দ্বিপদী উপপাদ্যের সাধারণ আকার লেখ। ২

খ. $\left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^{10}$ কে বিস্তৃত কর। ৪

গ. $\left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এবং x^{15} এর সহগদ্বয় সমান হলে, a এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3} x^{n-3}y^3 + ... + y^n.$

খ. $\left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^{10} = (2x^2)^{10} + \binom{10}{1} (2x^2)^{10-1} \left(\frac{a}{x^3}\right)^1 + \binom{10}{2} (2x^2)^{10-2}\left(\frac{a}{x^3}\right)^2 + \binom{10}{3} (2x^2)^{10-3}\left(\frac{a}{x^3}\right)^3\binom{10}{4}(2x^2)^{10-4}\left(\frac{a}{x^3}\right)^4 + \binom{10}{5}(2x^2)^{10-5}\left(\frac{a}{x^3}\right)^5 + \binom{10}{6}(2x^2)^{10-6}\left(\frac{a}{x^3}\right)^6\binom{10}{7}(2x^2)^{10-7}\left(\frac{a}{x^3}\right)^7 + \binom{10}{8}(2x^2)^{10-8}\left(\frac{a}{x^3}\right)^8 + \binom{10}{9} (2x^2)^{10-9}\left(\frac{a}{x^3}\right)^9 + \binom{10}{10}(2x^2)^{10-10}\left(\frac{a}{x^3}\right)^{10}$

$= 1024x^{20} + 10.512.x^{18}.\frac{a}{a^3} + 45.256.x^{16}.\frac{a^2}{x^6} + 120\cdot128\cdot x^{14}.\frac{a^3}{x^9} + 210.64.x^{12}.\frac{a^4}{x^{12}} + 252\cdot32\cdot x^{10}\frac{a^5}{x^{15}} + 210\cdot16\cdot x^{18}.\frac{a^6}{x^{18}} + 120\cdot8\cdot x^6.\frac{a^7}{x^{21}} + 45\cdot4\cdot x^4.\frac{a^8}{x^{24}} + 10.2.x^2.\frac{a^9}{x^{27}} + \frac{a^{10}}{x^{30}}$

$= 1024x^{20} + 5120ax^{15} + 11520a^2x^{10} + 15360a^3x^5 + 13440a^4 + 8064\frac{a^5}{x^5} + 3360\frac{a^6}{x^{10}} + 960\cdot\frac{a^7}{x^{15}} + 180\cdot\frac{a^8}{x^{20}} + 20\cdot\frac{a^9}{x^{25}} + \frac{a^{10}}{x^{30}}\cdot$ **(Ans.)**

গ. $\left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ বা, $(r + 1)$ তম পদ $= {}^{10}C_r(2x^2)^{10-r}\left(\frac{a}{x^3}\right)^r = {}^{10}C_r2^{10-r}a^rx^{20-5r}$

যদি $(r + 1)$ তম পদে x^5 থাকে, তবে $20 - 5r = 5$, অর্থাৎ $r = 3$

আবার, যদি $(r + 1)$ তম পদে x^{15} থাকে, তবে $20 - 5r = 15$, অর্থাৎ $r = 1$

সুতরাং x^5 এবং x^{15} এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান হলে,

${}^{10}C_3\cdot2^{10-3}\cdot a^3 = {}^{10}C_1\cdot2^{10-1}\cdot a$

বা, $\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2}\cdot2^7\cdot a^3 = 10\cdot2^9a$

বা, $a^2 = \frac{1}{3}$

$\therefore a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [ধনাত্মক মান নিয়ে] **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৭ ▸ $A = \left(2x^2 + \frac{1}{2x}\right)^8$

ক. দেখাও যে, ${}^8C_5 = {}^8C_3$ ২

খ. A এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

গ. Ax^2 এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ বিদ্যমান কিনা তা গাণিতিক যুক্তির মাধ্যমে উপস্থাপন কর। ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. বামপক্ষ $= {}^8C_5$

$= \frac{8!}{5!(8-5)!}$ $\left[\because {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}\right]$

$= \frac{8!}{5!3!}$

$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1}$

$= 56$

বামপক্ষ $= {}^8C_3$

$= \frac{8!}{3!(8-3)!}$

$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!}$

$= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$

$= 56$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, ${}^8C_5 = {}^8C_3$ **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে,

$A = \left(2x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8$

এখানে, $n = 8$ [জোড় সংখ্যা]

$\therefore$ A এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ হবে $= \left(\frac{n}{2} + 1\right)$ তমপদ

$= \left(\frac{8}{2} + 1\right)$ তমপদ

$= (4 + 1)$ তমপদ

$= 5$ তমপদ

$\therefore$ A বিস্তৃতির 5 তমপদ $= \binom{8}{4} (2x^2)^{8-4}\left(\frac{-1}{2x}\right)^4$

$= \frac{8!}{4!(8-4)!}(2x^2)^4\left(\frac{-1}{2x}\right)^4$

$= \frac{8!}{4!4!}\cdot 16 \times x^8 \cdot \frac{1}{16\cdot x^4}$

$= \frac{8!}{4!4!}\cdot x^{8-4}$

$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \cdot x^4$

$= \frac{1680}{24} \cdot x^4 = 70x^4$ **(Ans.)**

গ. $A = \left(2x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8 = {}^8C_0(2x^2)^8 + {}^8C_1(2x^2)^7\left(-\frac{1}{2x}\right)^1 + {}^8C_2\,(2x^2)^6\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 + {}^8C_3(2x^2)^5\left(-\frac{1}{2x}\right)^3 + {}^8C_4(2x^2)^4\left(-\frac{1}{2x}\right)^4 + {}^8C_5\,(2x^2)^3\left(-\frac{1}{2x}\right)^5 + {}^8C_6(2x^2)^2\left(-\frac{1}{2x}\right)^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \frac{8!}{0!(8-0)!} \times 2^8 \cdot x^{16} - \frac{8!}{1!(8-1)!} \times 2^7 \cdot x^{14} \times \frac{1}{2x} + \frac{8!}{2!(8-2)!} \times 2^6 \times x^{12} \times \frac{1}{4x^2} - \frac{8!}{3!(8-3)!} \times 2^5 \times x^{10} \times \frac{1}{8 \times x^3} + \frac{8!}{4!(8-4)!}\, 2^4 \times x^8 \times \frac{1}{2^4 \times x^4} - \frac{8!}{5!(8-5)!} \times 8 \times x^6 \times \frac{1}{2^5 \times x^5} + \frac{8!}{6!(8-6)!} \times 4 \times x^4 \times \frac{1}{2^6 \times x^6} + \ldots\ldots\ldots$

এখন, $Ax^2 = \left(2x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8 x^2$

$= 256x^{18} - 512x^{15} + 448x^{12} - 224x^9 + 70x^6 - 14x^3 + \frac{7}{4} \ldots$

$\therefore Ax^2$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ বিদ্যমান।

$\therefore$ বর্জিত পদটি হল 7 তম পদ। **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৮ ▸ $p = \left(a + \frac{x}{2}\right)^8$

$Q = \left(2x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8$

ক. একটি ধারার n তম পদ $= 2^{n-1}$ ধারাটি লেখ এবং দেখাও যে, এর অসীমতক সমষ্টি নেই। ২

খ. P এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে b, 512x এবং cx^2 হলে a, b ও c এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. Q এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

▸◂ ১৮ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে,

ধারার n তম পদ $= 2^{n-1}$

$\therefore$ ধারাটির ১ম পদ $= 2^{1-1} = 2^0 = 1$

২য় পদ $= 2^{2-1} = 2^1 = 2$

৩য় পদ $= 2^{3-1} = 2^2 = 4$

নির্ণেয় ধারাটি, 1 + 2 + 4 + ... **(Ans.)**

এখানে, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{2}{1} = 2$

$\therefore |r| = |2| = 2 \not< 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নেই। **(দেখানো হলো)**

খ. এখানে, $P = \left(a + \frac{x}{2}\right)^8$

$\therefore$ দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$P = \left(a + \frac{x}{2}\right)^8 = a^8 + \binom{8}{1} a^7 \left(\frac{x}{2}\right) + \binom{8}{2} a^6 \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots\ldots$

$= a^8 + 8a^7 \cdot \frac{x}{2} + \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} a^6 \cdot \frac{x^2}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= a^8 + 4a^7x + 7a^6x^2 + \ldots\ldots\ldots$

কিন্তু P এর বিস্তৃতির ১ম তিনটি পদ যথাক্রমে b, 512x এবং cx^2।

$b + 512x + cx^2 \ldots\ldots\ldots = a^8 + 4a^7x + 7a^6x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$(i)

(i) নং এর উভয়পক্ষ হতে x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$b = a^8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$(ii)

$512 = 4a^7$

বা, $a^7 = \frac{512}{4}$

বা, $a^7 = 128$

বা, $a^7 = 2^7$

$\therefore a = 2$

আবার, $c = 7a^6$

$= 7 \cdot 2^6$ [a এর মান বসিয়ে]

$= 448$

a এর মান (ii) নং বসিয়ে পাই, $b = 2^8 = 256$

$\therefore$ a, b ও c এর মান যথাক্রমে 2,256 ও 448 **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে,

$Q = \left(2x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8$

এখানে, n = 8 জোড়সংখ্যা। সুতরাং Q এর বিস্তৃতির মধ্যপদ হবে $\left(\frac{8}{2} + 1\right)$ বা (4 + 1) তম পদ।

$\therefore$ Q এর বিস্তৃতির মধ্যপদ $= {}^8C_4\,(2x2)^{x-4}\left(-\frac{1}{2x}\right)^4$

$= 70 \cdot 2^4 \cdot x^8 \frac{1}{2^4 \cdot x^4}$

$= 70x^4$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৯ ▸ $(a + 2x)^5$ একটি দ্বিপদী।

ক. a = 1 হলে, প্যাসেকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃতিটি নির্ণয় কর। ২

খ. প্রদত্ত দ্বিপদী বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 320 হলে a মান কত হবে? ৪

গ. ‘খ’ হতে প্রাপ্ত a এর ঋণাত্মক মান বসিয়ে দ্বিপদীটির মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

▸◂ ১৯ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজ :

n = 0	1
n = 1	1 1
n = 2	1 2 1
n = 3	1 3 3 1
n = 4	1 4 6 4 1
n = 5	1 5 10 10 5 1

এখন, প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে দ্বিপদীর বিস্তৃতি নির্ণয় করি।

$\therefore (a + 2x)^5 = (1 + 2x)^5$ [$\because a = 1$]

$= 1 + .1.2x + 10.1(2x)^2 + 10.1(2x)^3 + 5.1(2x)^4 + (2x)^5$

$= 1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5$ **(Ans.)**

খ. মনে করি,

প্রদত্ত দ্বিপদীর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদে x^3 বর্তমান।

এখন, (r + 1) তম পদ $= {}^5C_r a^{5-r}(2x)^r$

$= {}^5C_r a^{5-r} 2^r x^r$

$\because r = 3$

প্রশ্নমতে, ${}^5C_3 a^{5-3} 2^3 = 320$

বা, $10 \cdot 8a^2 = 320$

বা, $80a^2 = 320$

বা, $a^2 = \frac{320}{80}$

বা, $a^2 = 4$

$\therefore a = \pm 2$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $a = -2$ ['খ' হতে পাই]

$\therefore$ প্রদত্ত দ্বিপদীটি হয় $= (-2 + 2x)^5$

প্রদত্ত দ্বিপদীটির বিস্তৃতিতে মোট পদ সংখ্যা $= (5 + 1)$ টি = 6টি

$\therefore$ 3, 4 নং পদ দুটি মধ্যপদ।

$\therefore$ 3তম পদ $= {}^5C_2(-2)^{5-2}(2x)^2$

$= 10(-2)^3 \cdot 4x^2$

$= -320x^2$

এবং 4 তম পদ $= {}^5C_3(-2)^{5-3}(2x)^3$

$= 10(-2)^2 \cdot 8x^3$

$= 10 \cdot 4 \cdot 8x^3$

$= 320x^3$

$\therefore (-2 + 2x)^5$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদদ্বয় $-320x^2$, $320x^3$ **(Ans.)**

সৃজনশীল প্রশ্নব্যাংক উত্তরসহ

প্রশ্ন–২০ ▸ $\left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^6$ **এর বিস্তৃতি দ্বিপদী উপপাদ্যের সাধারণ আকার ব্যবহার করে নির্ণয় করা যায়।**

ক. দ্বিপদী উপপাদ্যের সাধারণ আকারটি লেখ। ২

খ. সাধারণ আকার ব্যবহার করে $\left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^6$ এর বিস্তৃতি বের কর। ৪

গ. 'খ' এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 160 ও x বর্জিত পদ a হলে k ও a এর মান নির্ণয় কর। ৪

উত্তর : ক. $x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + ... + \binom{n}{n-1} xy^{n-1} + y^n$

খ. $x^{12} + 6kx^9 + 15k^2x^6 + 20k^3x^3 + 15k^4 + 6\frac{k^5}{x^3} + \frac{k^6}{x^6}$

গ. $k = 2; a = 240.$

প্রশ্ন–২১ ▸ $(x - \frac{x}{2})^7$

ক. x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে উদ্দীপকের বিস্তৃতির প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর। ২

খ. ক নং হতে প্রাপ্ত বিস্তৃতির x এর সহগ কত? ৪

গ. ক নং হতে প্রাপ্ত বিস্তৃতির সাহায্যে $(1.995)^7$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। ৪

উত্তর :

ক. $128 - 224x + 168x^2 - 70x^3 + ...$

খ. -224

গ. 125.7767

প্রশ্ন–২২ ▸ $(a - \frac{x}{2})^6$ **একটি দ্বিপদী রাশি।**

ক. প্রদত্ত রাশিটির দ্বিপদী বিস্তৃতির রূপ লেখ। ২

খ. বিস্তৃতির প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে m, $-96x$ এবং $60x^2$ হলে a ও m মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রাপ্ত ফলাফল ব্যবহার করে a এর মান বসিয়ে $(1 - x)(a - \frac{x}{2})^6$ এর মান x^3 পর্যন্ত বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ৪

উত্তর :

ক. $a^6 + \binom{6}{1}a^5\left(-\frac{x}{2}\right) + \binom{6}{1}a^4\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{6}{3}a^3\left(-\frac{x}{2}\right)^3 + \binom{6}{4}a^2\left(-\frac{x}{2}\right)^4 + \binom{6}{5}a\left(-\frac{x}{2}\right)^5 + \left(-\frac{x}{2}\right)^6$

খ. $\left.\begin{matrix} a = 2 \\ m = 64 \end{matrix}\right\}$ গ. $32 - 72x + 60x^2 - 25x^3 + ...$

প্রশ্ন–২৩ ▸ $A = (p + qx)^n$ **একটি দ্বিপদী রাশি।**

ক. p = 1, q = 2 ও n = 3 হলে প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে A কে বিস্তৃত কর। ২

খ. q = 3 ও n = 5 হলে A এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ 1080 হলে, p এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. p = 1, q = 1 ও n = 40 হলে A এর বিস্তৃতিতে 15 তম এবং 16 তম পদদ্বয় পরস্পর সমান হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

উত্তর : ক. $1 + 6x + 12x^2 + 8x^2$ খ. $p = \sqrt[3]{12}$ গ. $\frac{15}{26}$

প্রশ্ন–২৪ ▸ $(a + 3x)^n$

ক. প্রদত্ত রাশির বিস্তৃতি কর। ২

খ. রাশিটির বিস্তৃতিতে প্রথম ও দ্বিতীয় পদের মান নির্ণয় কর। ৪

গ. রাশিটির বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ b, $\frac{21}{2}$bx, $\frac{189}{4}bx^2$ হলে a, b এবং n এর মান নির্ণয় কর। ৪

উত্তর : খ. a^n, $na^{n-1}3x$; গ. a = 2, b = 128, n = 7

প্রশ্ন–২৫ ▸ $(x + y)^n$, $\left(p - \frac{x}{2}\right)^6$

ক. $(x + y)^n$ এর বিস্তৃতি কর। ২

খ. $\left(p - \frac{x}{2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিটি লেখ। ৪

গ. যদি 'খ' এর বিস্তৃতি $r - 96x + 5x^2 + ...$ এর সমান হয় তাহলে p এবং r এর মান নির্ণয় কর। ৪

উত্তর : গ. $p = 24$, $r = (24)^6$

প্রশ্ন–২৬ ▸ $\left(2x + \frac{1}{6x}\right)^{10}$

ক. রাশিটি বিস্তৃতি কর। ২

খ. বিস্তৃতির সাধারণ পদ কত? ৪

গ. বিস্তৃতির x বর্জিত পদটির মান নির্ণয় কর। ৪

উত্তর : খ. $10c_r\, 2^{10-2r}\, x^{10}\, 3^{-r}$; গ. $\frac{28}{27}$

প্রশ্ন–২৭ ▸ $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^{11}$

ক. রাশিটির বিস্তৃতি কর। ২

খ. সাধারণ পদের মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x^{10} এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

উত্তর : খ. $^{11}C_r(2x^2)^{11-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r$; **গ.** $^{11}C_r(2x^2)^{11-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r$

অধ্যায় সমন্বিত সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–২৮ ▸ $A = \left(1+\frac{x}{2}\right)^8$ এবং $B = \left(a-\frac{x}{3}\right)^7, a \neq 0.$

ক. A এর প্রথম চার পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ২

খ. B এর বিস্তৃতিতে a^3 এর সহগ 560 হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(2 - x)A$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $1·9 \times (1·05)^8$ মান নির্ণয় কর। ৪

▸◂ ২৮ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $A = \left(1+\frac{x}{2}\right)^8$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)^8 = 1 + \binom{8}{1}\left(\frac{x}{2}\right) + \binom{8}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{8}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + ...$$

$$= 1 + 8·\frac{x}{2} + \frac{8.7}{1.2}·\frac{x^2}{4} + \frac{8.7.6}{1.2.3}\frac{x^3}{8} + ...$$

$$= 1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + ... \textbf{(Ans.)}$$

খ. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(a-\frac{x}{3}\right)^7 = a^7 + {}^7C_1\, a^6\left(-\frac{x}{3}\right) + {}^7C_2\, a^5\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + {}^7C_3\, a^4\left(-\frac{x}{3}\right)^3 + {}^7C_4\, a^3\left(-\frac{x}{3}\right)^4 + ... [a \neq 0]$$

এখানে, বিস্তৃতিটির a^3 এর সহগ ${}^7C_4\left(-\frac{x}{3}\right)^4 = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}·\frac{x^4}{3^4} = \frac{35}{81}x^4$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{35}{81}x^4 = 560$

বা, $x^4 = 560 \times \frac{81}{35}$

বা, $x^4 = 1296$

বা, $x^4 = (\pm 6)^4$

$\therefore x = \pm 6$ **(Ans.)**

গ. x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(2 - x)$ A কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত করতে হবে। অর্থাৎ $(2 - x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^8$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত করতে হবে।

$\left[\text{‘ক’ হতে পাই } A = \left(1+\frac{x}{2}\right)^8\right]$

[অনুশীলনী ১০·১ এর উদাহরণ ৭ নং দেখ]

প্রশ্ন–২৯ ▸ $(1 - 3x)^5, \left(1-\frac{x^2}{4}\right)^8$ এবং $\left(x^2+\frac{K}{x}\right)^6$ তিনটি দ্বিপদী রাশি।

ক. প্রথম দ্বিপদী রাশিকে বিস্তৃত কর। ২

খ. দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতির x^3 ও x^6 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

গ. তৃতীয় রাশির বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 160 হলে K এর মান কত হবে? ৪

▸◂ ২৯ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. অনুশীলনী–১০·১ এর উদাহরণ ২ নং দেখ।

খ. অনুশীলনী–১০·১ এর উদাহরণ ৪ নং দেখ।

গ. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^6 = (x^2)^6 + {}^6C_1\,(x^2)^5\left(\frac{k}{x}\right) + {}^6C_2\,(x^2)^4\left(\frac{k}{x}\right)^2 + {}^6C_3·(x^2)^3·\left(\frac{k}{x}\right)^3 + ...$$

$$= x^{12} + {}^6C_1\, x^{10}·\frac{k}{x} + {}^6C_2\, x^8·\frac{k^2}{x^2} + {}^6C_3\, x^6\frac{k^3}{x^3} + ...$$

এখানে, বিস্তৃতিটির x^3 এর সহগ,

${}^6C_3k^3 = \frac{6·5·4}{1·2·3}·k^3 = 20k^3$

প্রশ্নানুসারে, $20k^3 = 160$

বা, $k^3 = \frac{160}{20}$

বা, $k^3 = 8$

বা, $k^3 = 2^3$

$\therefore k = 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৩০ ▸ তিনটি বীজগাণিতিক রাশি নিম্নরূপ:

(i) 1 + x (ii) 1 – x (iii) 2x + 1

ক. (i) নং রাশির বর্গকে হর এবং (iii) নং রাশিকে লব ধরে গঠিত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ২

খ. সূচকের মৌলিক সূত্রটি লেখ। (i) নং রাশিকে 4 এর সূচক এবং (ii) নং রাশিকে 4 এর সূচক ধরে গঠিত রাশিদ্বয়ের সমষ্টি 10 হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $(x + y)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(p + 1)$ তম পদ কত? (i) নং এবং (ii) নং রাশির গুণফলের সূচক n হলে, এর বিস্তৃতির চতুর্থ পদের সহগের সংখ্যাসূচক মান, তৃতীয় পদের সহগের দ্বিগুণ হয়। n এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. (i) রাশির বর্গকে হর ও (iii) নং রাশিকে লব ধরে গঠিত ভগ্নাংশ

$= \frac{2x+1}{(1+x)^2}$

ধরি, $\frac{2x+1}{(1+x)^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2}$ ....(i)

(i) নং এর উভয়পক্ষে $(1+x)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই–

$2x + 1 = A(1 + x) + B$ ....(ii)

(ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই–

$2(-1) + 1 = A(1-1) + B$

বা, $-2 + 1 = B$

$\therefore B = -1$

(ii) নং–এ x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$2x + 1 = A + Ax + B = Ax + (A + B)$

$\therefore A = 2$

$\frac{2x+1}{(1+x)^2}$ এর আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ $= \frac{2}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$ **(Ans.)**

খ. সূচকের মৌলিক সূত্র : $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(i) নং রাশিকে 4 সূচক ধরি $= 4^{1+x}$

(ii) নং রাশিকে 4 এর স্চক ধরি $= 4^{1-x}$

প্রশ্নমতে,

$4^{1+x} + 4^{1-x} = 10$

বা, $4 \cdot 4^x + \frac{4}{4^x} = 10$ $\left[\because a^{m+n} = a^m a^n, a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}\right]$

বা, $4 \cdot 4^x \cdot 4^x + 4 = 10 \cdot 4^x$

বা, $4(4^x)^2 - 10 \cdot 4^x + 4 = 0$

বা, $4a^2 - 10a + 4 = 0$ [$4^x = a$ ধরে]

বা, $4a^2 - 8a - 2a + 4 = 0$

বা, $4a(a-2) - 2(a-2) = 0$

বা, $(a-2)(4a-2) = 0$

হয় $a - 2 = 0$ অথবা, $4a - 2 = 0$

$\therefore a = 2$ বা, $4a = 2$

$\therefore a = \frac{1}{2}$

$a = 2$ হলে, $4^x = 2$

বা, $(4)^x = 4^{\frac{1}{2}}$ [$\because \sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$]

$\therefore x = \frac{1}{2}$

আবার, $a = \frac{1}{2}$ হলে, $4^x = \frac{1}{2}$

বা, $4^x = \frac{1}{\sqrt{4}}$

বা, $4^x = 4^{\frac{-1}{2}}$

$\therefore x = -\frac{1}{2}$

নির্ণেয় সমাধান : $x = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

গ. $(x + y)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(p + 1)$ তম পদ $= {}^nC_p . x^{n-p} \cdot y^p$. **(Ans.)**

(i) নং এবং (ii) নং রাশির গুণফলের সূচক n হলে,

রাশিটি $= \{(1+x)(1-x)\}^n = (1-x^2)^n$

এখানে, $(1-x^2)^n = {}^nC_0 . 1^{n-0} \cdot (-x^2)^0 + {}^nC_1 . 1^{n-1}(-x^2)^1 + {}^nC_2 . 1^{n-2} \cdot (-x^2)^2 + {}^nC_3 . 1^{n-3} \cdot (-x^2)^3 +$ ....

এখানে, তৃতীয় পদের সহগের সংখ্যাসূচক মান $= {}^nC_2(-1)^2 = {}^nC_2$

চতুর্থ পদের সহগ $= {}^nC_3(-1)^3 = -{}^nC_3$

শর্তমতে, $2 \cdot {}^nC_2 = {}^nC_3$

বা, $2 \cdot \frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$

বা, $2 = \frac{n-2}{3}$

$\therefore n = 8$ **(Ans.)**